Corso GEOMETRIA 2, a.a. 2022-2023

Informazioni sul corso:

- Lezioni: G. Pezzini, MAR - MER (di solito)
- Esercitazioni: Daniele Valeri, VEN (di solito) $\leftarrow$ { 2 ore normalmente / 3 ore talvolta
- Ogni venerdì: foglio di esercizi pubblicato sul sito, soluzioni in aula il ven. successivo (e poi pubblicate online)
- Esami: scritto e orale
- Diario delle lezioni: giornaliero, sul sito del corso
- Corsi aa.aa. precedenti:
  www.mat.uniroma1.it/people/pezzini/teaching.html
  (attenzione: il corso del 2020-2021 è simile, ma non identico!)
- Ricevimento studenti: da stabilire
- Prerequisiti: 1) familiarità con funzioni continue (parte 1 del corso)
  2) un po' di teoria dei gruppi (parte 2)
  3) derivate di appl. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (parte 3)

Qualche notazione che useremo: $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

Inclusione: $A \subseteq B$
inclusione propria: $A \subsetneq B$

$\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$, e analogam. $\mathbb{Z}_{>0}$, $\mathbb{R}_{>0}$, $\mathbb{C}_{\neq 0}$, ecc...

Il corso è diviso in 3 parti:

1) Topologia generale
2) Topologia algebrica (gruppo fondamentale e rivestimenti)
3) Geometria differenziale di curve e superfici in $\mathbb{R}^3$.

TOPOLOGIA GENERALE

Introduzione

Nasce per studiare figure (= sottoinsiemi) in $\mathbb{R}^n$ e applicazioni <u>continue</u> fra esse.

Dati $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: X \to Y$, si definisce f <u>continua</u> con la solita def.: $\forall x_0 \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid$ se $x \in X$ soddisfa $\|x - x_0\| < \delta$ allora $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$

anche se X e Y sono sottoinsiemi qualsiasi.

<u>Def.</u>: Una tale f si dice <u>omeomorfismo</u> se f è biiettiva, continua, e $f^{-1}: Y \to X$ è continua.

Oss.: Gli omeomorfismi in top. hanno lo stesso ruolo degli isom. in teoria dei gruppi (o anelli). Però attenzione:

è necessario imporlo nella def.

omeom. in topologia : f biiettiva, f continua, f^{-1} continua

isom. di gruppi : f biiettiva, f omomorfismo, f^{-1} ~~omomorfismo~~

non è necessario imporlo nella def., segue automaticamente!

Esempi: 1) $[0,1]$ $(\subseteq \mathbb{R})$ è omeomorfo a $[a,b]$ $\forall a<b$

omeomorfismo
$$f: [0,1] \longrightarrow [a,b]$$
$$t \longmapsto tb+(1-t)a$$

2) $S^1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x^2+y^2}_{``\|(x,y)\|^2"}=1\}$ è omeomorfo al quadrato $Q=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|,|y|\}=1\}$

tramite $Q \xrightarrow{f} S^1$, $\quad f^{-1}(x,y)=\dfrac{1}{\max\{|x|,|y|\}}\cdot(x,y)$

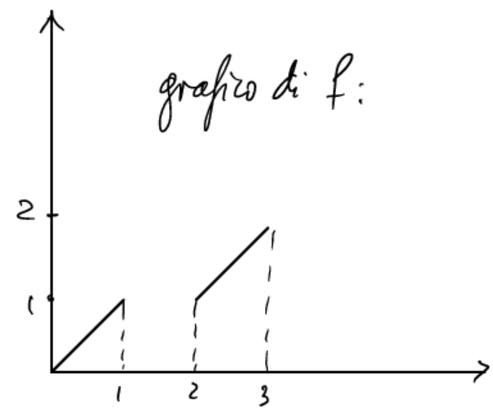
$$q \longmapsto \frac{1}{\|q\|}\cdot q$$

f e f^{-1} sono biiettive e continue

3) $f: [0,1] \cup]2,3] \longrightarrow [0,2]$

$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ x-1 & \text{se } x \in]2,3] \end{cases}$$

è continua e biiettiva, ma f^{-1} <u>non</u> è continua



Questa f <u>non</u> è un omeomorfismo.

4) $]0,1[$ è omeomorfo a $]0,+\infty[$ ad es.

tramite $f:]0,1[\longrightarrow]0,+\infty[$

$$x \longmapsto e^{-x}$$

5) $]0,+\infty[$ è omeomorfo a $\mathbb{R}$, ad es.

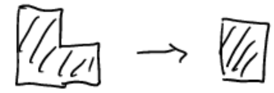
tramite $x \mapsto \log(x)$

6) $]0,1[$ non è omeomorfo a $[0,1]$ (dim.: più avanti)

è <u>più difficile</u> dimostrarlo rispetto agli es. precedenti, perché va dimostrato che non esiste <u>alcun</u> omeomorfismo $]0,1[\to [0,1]$!

Sfera n dimensionale:

7) $S^n = \{ p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\| = 1 \}$. Vale: $S^n \setminus \{(1,0,\dots,0)\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ tramite la <u>proiezione stereografica</u> (esercizio: vedere la def.)

8) Succede spesso di avere s.i. omeomorfi di $\mathbb{R}^n$, in cui però è noioso o noiosissimo scrivere un omeom. esplicito. Ad es.  ,

m-agono regolare $\longrightarrow$ ℓ-agono regolare
$(\forall m, \ell \geq 3)$

Nel corso vedremo delle scorciatoie per dim. che figure sono omeomorfe senza fare troppi conti.

9) <u>Teorema</u> (invarianza del dominio): dati $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

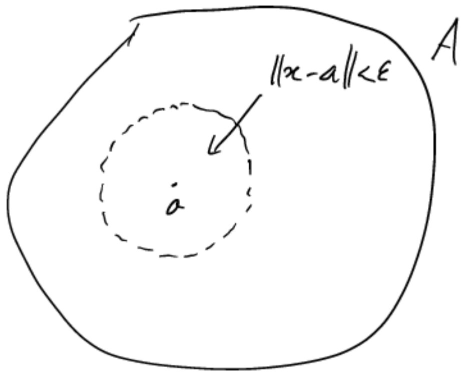
$$\mathbb{R}^n \text{ è omeom. a } \mathbb{R}^m \iff n = m$$

(<u>senza dim.</u>, è difficile! Nel corso vedremo il teorema solo nei casi particolari $n=1$ e $n=2$.)

Vediamo altre considerazioni sulla def. di applicazione continua.

Ricordiamo la def.:

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ è <u>aperto</u> se $\forall a \in A\ \exists \varepsilon > 0 \,|$ se $x \in \mathbb{R}^n$ soddisfa $\|x-a\| < \varepsilon$ allora $x \in A$



<u>Esercizio</u>: Dim. che la <u>palla aperta</u> $B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-p\| < r\}$ con $p \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$, è un <u>aperto</u> di $\mathbb{R}^n$. Suggerimento: usare la disuguaglianza triangolare.

<u>Def.</u>: 1 Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sottoinsieme qualsiasi, e sia $p \in \mathbb{R}^n$.

p si dice <u>aderente a X</u> se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X \mid \|x - p\| < \varepsilon$

2) $C \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice <u>chiuso</u> se $\forall p$ aderente a C vale $p \in C$.

<u>Esempio</u>: $1 \in \mathbb{R}$ è aderente a $[0,1[$

<u>Esercizio</u>: Dim. che $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto $\iff \mathbb{R}^n \setminus A = C$ è chiuso.

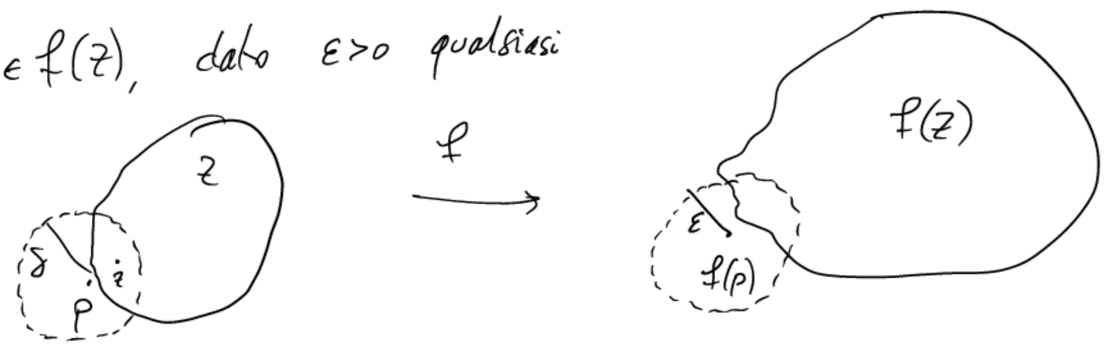
<u>Proposizione</u>: Sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Sono equivalenti:

1) f è continua

2) $\forall Z \subseteq \mathbb{R}^n$, $\forall p \in \mathbb{R}^n$: se p è aderente a Z allora $f(p)$ è aderente a $f(Z)$

3) $\forall A \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto: $f^{-1}(A)$ $(\subseteq \mathbb{R}^n)$ è aperto.

<u>Dim.</u>: <u>1) $\Rightarrow$ 2)</u> | Supp. f continua, siano p, Z come in 2) con p aderente a Z, dim. che $f(p)$ è aderente a $f(Z)$. Sia $q \in f(Z)$, dato $\varepsilon > 0$ qualsiasi



prendiamo $\delta > 0$ della def. di continuità in p. Sappiamo che p è aderente a Z, quindi esiste $z \in Z$ con $\|p - z\| < \delta$. Per continuità: $\|f(z) - f(p)\| < \varepsilon$, e ovviam. $f(z) \in f(Z)$. Quindi $f(p)$ è aderente a $f(Z)$.

<u>2) $\Rightarrow$ 3)</u> | Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto, dim. che $f^{-1}(A)$ è aperto.

Per assurdo, supp $\exists p \in f^{-1}(A) \mid \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in B_\varepsilon(p) \mid x \notin f^{-1}(A)$.

Allora p è aderente al complementare $\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(A) = C$,

per 2) sappiamo che $f(p)$ è aderente a $f(C)$. Ora:

gli elem. di C sono punti di $\mathbb{R}^n$ che non vengono mandati in a

per alcun $a \in A$.

Segue che nessun punto di $f(C)$ è in A, cioè $f(C) \subseteq \mathbb{R}^m \setminus A$.

Allora $\forall \varepsilon > 0$ esistono punti di $f(C)$ a distanza $< \varepsilon$ da $f(p)$,

e questi punti non sono in A: assurdo, perché A è aperto e

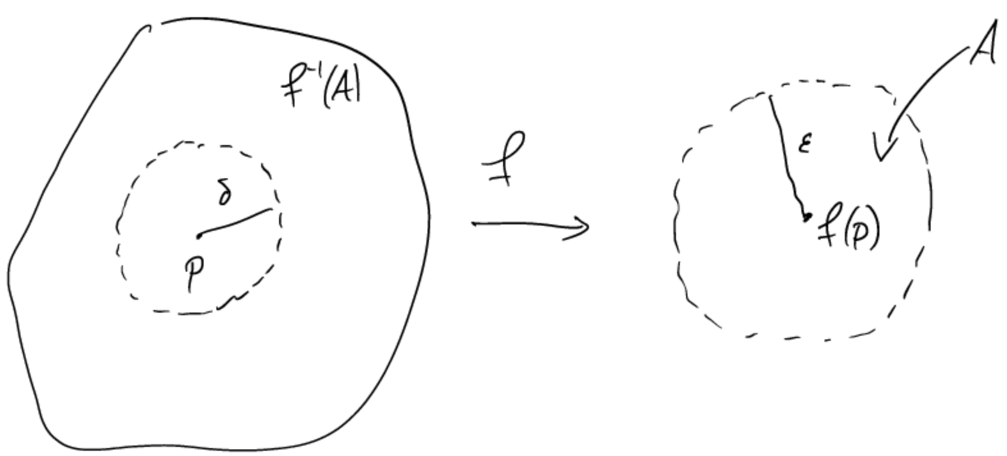
$f(p) \in A$.

3) $\Rightarrow$ 1) Supp. 3) e verifichiamo la continuità di f in $p \in \mathbb{R}^n$.

Dato $\varepsilon > 0$ consid. $A = B_\varepsilon(f(p)) \subseteq \mathbb{R}^m$: è un aperto.

Allora $f^{-1}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto e contiene p (perché

$f(p) \in B_\varepsilon(f(p))$):



quindi $\exists \delta > 0 \mid B_\delta(p) \subseteq f^{-1}(A)$, cioè ogni $x \in \mathbb{R}^n$ a distanza $< \delta$ è in $f^{-1}(A)$, cioè è tale che $f(x) \in A$, cioè $f(x)$ è a distanza $< \varepsilon$ da $f(p)$. Segue: f continua in p, $\forall p \in \mathbb{R}^n$. $\square$

La condizione 2) può essere presa come def. equivalente di continuità (almeno per applicaz. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$). Vantaggi rispetto alla def. usuale di continuità:

- 2) è data senza riferirsi ai numeri reali ε, δ

Anche la condiz. 3) può essere presa come def. di continuità. Qui i vantaggi sono:

- anche 3) è data senza riferirsi ai numeri reali ε, δ;
- in più, 3) è data senza far alcun riferimento a singoli pti.

In effetti, 3) è la definizione che ispira tutta la topologia generale moderna, concentrandosi solo sulla famiglia di sottoinsiemi

$$\{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A \text{ aperto}\}$$

di $\mathbb{R}^n$. Questo dà origine alla def. di spazio topologico.

Spazi topologici e basi:

Definizione: Sia X un insieme, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (= insieme delle parti di X).

$\mathcal{T}$ si dice una <u>topologia</u> se:

1) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$
2) l'unione di una famiglia qualsiasi$^{(*)}$ di elem. di $\mathcal{T}$ è un elem. di $\mathcal{T}$
3) l'intersez. di <u>due</u> elem. qualsiasi di $\mathcal{T}$ è un elem. di $\mathcal{T}$.

(*) qualsiasi = finita, infinita, anche vuota (l'unione di una famiglia vuota di insiemi è $\emptyset$ per def.)

Se $\mathcal{T}$ è una topologia, gli elem. di $\mathcal{T}$ si dicono <u>aperti</u> (di $\mathcal{T}$), e $(X, \mathcal{T})$ o semplicem. X si dice uno <u>spazio topologico</u>.

Oss.: 3) è equivalente alla condizione

3') l'intersezione di una famiglia <u>finita</u> di elem. di $\mathcal{T}$ è un elem. di $\mathcal{T}$.

Infatti: $3') \Rightarrow 3)$ è ovvio

$3) \Rightarrow 3')$ per induzione, cioè dati $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}$ allora

$$A_1 \cap \dots \cap A_n = \underbrace{(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}_{\substack{\in \mathcal{T} \text{ per} \\ \text{induz.}}} \cap A_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per } 3)}}{\in} \mathcal{T}$$

Attenzione alla terminologia! <u>D'ora in poi</u>:

intervallo aperto $= \;]a, b[$ come al solito $(a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
$b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$

<u>aperto</u> = elemento della topologia che stiamo considerando

Gli aperti „usuali" di $\mathbb{R}^n$ saranno aperti per una certa topologia chiamata <u>euclidea</u>.

<u>Esempi</u>: 1) Ogni insieme X ammette almeno le seguenti topologie:

$\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ topologia <u>banale</u> (o <u>indiscreta</u>)

$\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ topologia <u>discreta</u>

2) $X = \mathbb{R}^n$ $\quad \mathcal{T} = \{$ sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^n$ come nella def. usuale ricordata nell'introduzione $\}$

Si verifica facilmente che $\mathcal{T}$ soddisfa 1), 2), 3).
Questa topologia si dice <u>euclidea</u> (la rivedremo meglio più avanti).

Su $\mathbb{R}$, questa $\mathcal{T}$ si può anche descrivere così: $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A$ è unione di intervalli aperti.

Verifica degli assiomi: 1) $\emptyset$ = unione (vuota) di int. aperti

$$X = \mathbb{R} = \left]-\infty, 1\right[\cup \left]0, +\infty\right[$$

2) ovvio

3) Dati $A = \bigcup_{i \in I} \left]a_i, b_i\right[$

$$B = \bigcup_{j \in J} \left]c_j, d_j\right[$$

allora $A \cap B = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \underbrace{\left]a_i, b_i\right[\cap \left]c_j, d_j\right[}$

$$= \begin{cases} \emptyset & \text{opp.} \\ \left]\max\{a_i, c_j\}, \min\{b_i, d_j\}\right[\end{cases}$$

quindi $A \cap B \in \mathcal{T}$.

3) Sia X un insieme, $p \in X$. Definiamo una topologia su X:

$$\mathcal{T} = \{ A \subseteq X \mid A \text{ è vuoto, oppure } A \ni p \}$$

Cioè in $\mathcal{T}$ vale: A è aperto se e solo se A è vuoto oppure contiene p.

Gli assiomi 1), 2), 3) si verificano subito, ad es. per 3) prendiamo $A, B \in \mathcal{T}$; se A opp. B è vuoto allora $A \cap B = \emptyset$ e vale $A \cap B \in \mathcal{T}$, se invece A e B sono entrambi non noti allora entrambi contengono p, quindi anche $A \cap B$, da cui $A \cap B \in T$.

4) Sia X un insieme qualsiasi, e poniamo

$$T = \{ A \subseteq X \mid A = \emptyset \text{ oppure } X \setminus A \text{ è un insieme finito} \}$$

T è una topologia (verifica sarà negli esercizi), è detta topologia cofinita.

Def.: Sia (X, T) sp. topologico. Un sottoinsieme $C \subseteq X$ si dice chiuso se $X \setminus C$ è aperto.

Oss.: 1) Proprietà dei chiusi:

1) X, $\emptyset$ sono chiusi

2) l'intersezione di una famiglia qualsiasi di chiusi è un chiuso

3) l'unione di due chiusi è un chiuso

(Seguono facilmente da
$$X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} C_i \right) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus C_i)$$

$$X \setminus (C \cup D) = (X \setminus C) \cap (X \setminus D)$$

che valgono per ogni sottoinsieme di X.)

2) In un qualsiasi sp. top. X, ci possono essere sottoinsiemi contemporaneam. aperti e chiusi. Ad es. $\emptyset$ e X lo sono sicuramente! Se ad es. X ha topologia discreta, allora ogni sottoinsieme è aperto e chiuso.

Def: Sia X sp. topologico con topologia $\mathcal{T}$.
Sia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. La famiglia $\mathcal{B}$ si dice <u>base</u> di $\mathcal{T}$ se ogni aperto si può scrivere come unione di elem. di $\mathcal{B}$.

(qui unione = unione qualsiasi, anche vuota)

Esempi: 1) $\mathcal{T}$ è sempre una base per $\mathcal{T}$.

2) Se $\mathcal{T}$ è la topologia discreta su un insieme X, allora $\mathcal{B} = \{ \{x\} \mid x \in X \}$ è una base di $\mathcal{T}$.

3) $\mathcal{B} = \{]a,b[\mid a,b \in \mathbb{R},\ a<b \}$ è una base della top. euclidea su $\mathbb{R}$.

Osservazione: Se $\mathcal{B}$ è una base di $\mathcal{T}$, allora $\mathcal{B}$ determina univocam. $\mathcal{T}$, perché $\mathcal{T} = \{$ unioni (arbitrarie) di elem. di $\mathcal{B} \}$

Proposizione: Sia X un insieme, e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia di sottoinsiemi.
Esiste una topologia $\mathcal{T}$ su X di cui $\mathcal{B}$ è base se e solo se sono soddisfatte:

1) X è unione di elem. di $\mathcal{B}$

2) per ogni $A, A' \in \mathcal{B}$ l'intersezione $A \cap A'$ è unione di elem. di $\mathcal{B}$

(equivalentemente: $\forall A, A' \in \mathcal{B}$ $\forall p \in A \cap A'$ $\exists D \in \mathcal{B}$ |

$p \in D \subseteq A \cap A'$)

Oss.: Attenzione: se è già data una topologia $\mathcal{T}$, questa Proposizione non si può usare per determinare se $\mathcal{B}$ è una base di $\mathcal{T}$! (E' un errore comune negli esami scritti...)

Dim.: $\Rightarrow$| Supp. esista $\mathcal{T}$, dim. 1) e 2).

1) X è aperto, quindi unione di elem. della base (ok)

2) Dati $A, A' \in \mathcal{B}$, essi sono aperti, e anche $A \cap A'$, che quindi si può scrivere come unione di elem. della base. (ok)

$\Leftarrow$| Supp. 1) e 2) per $\mathcal{B}$, dim. che $\exists \mathcal{T}$. Definiamo

$\mathcal{T} = \{$ unioni qualsiasi di elem. di $\mathcal{B} \}$

Verifichiamo gli assiomi di topologia per $\mathcal{T}$:

1) $\emptyset$ = unione vuota di elem. di $\mathcal{B}$ $\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{T}$

X si scrive come unione di elem. di $\mathcal{B}$ $\Rightarrow X \in \mathcal{T}$

2) Unioni di elem. di $\mathcal{T}$ sono in $\mathcal{T}$: ovvio dalla def.

3) Siano $A, A' \in \mathcal{T}$, allora sono unioni di elem. di $\mathcal{B}$:

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{con } A_i \in \mathcal{B} \ \forall i \in I$$

$$A' = \bigcup_{j \in J} D_j \quad \text{con } D_j \in \mathcal{B} \ \forall j \in J$$

Segue: $$A \cap A' = \left(\bigcup_i A_i\right) \cap \left(\bigcup_j D_j\right) = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cap D_j)$$

Ora, ogni $A_i \cap D_j$ si scrive come unione di elem. di $\mathcal{B}$, quindi anche $A \cap A'$ complessivamente si scrive come unione di elem. di $\mathcal{B}$, cioè $A \cap A' \in \mathcal{T}$.

$\square$

<u>Def</u>: Siano $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ topologie su X. Se $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ allora $\mathcal{T}_2$ si dice <u>più fine</u> di $\mathcal{T}_1$.

<u>Oss.</u>: Se $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ sono topologie su X, non è detto che $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ sia una topologia. Invece $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ è una topologia sicuramente, ed è meno fine di $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$.

In generale, l'intersezione di una famiglia qualsiasi di topologie è una topologia.

Esempio: Sia K un campo (ad es. $K=\mathbb{R}$ opp. $\mathbb{C}$), e consid. su $K^n = X$.

Dato $f \in K[x_1,..,x_n]$ polinomio, def.

$$X_f = \{ p \in X \mid f(p) \neq 0 \}$$

e consid. $\mathcal{B} = \{ X_f \mid f \in K[x_1,..,x_n] \}$.

Oss.: $X_1 = X$, e dati f,g polinomi vale

$$X_f \cap X_g = \{ p \in X \mid f(p) \neq 0 \text{ e } g(p) \neq 0 \} = X_{f \cdot g}$$

Quindi X è unione di elem. di $\mathcal{B}$ (anzi, qui X stesso è un elem. di $\mathcal{B}$), e l'intersez. di due elem. di $\mathcal{B}$ è un elem. di $\mathcal{B}$ (anzi, qui quest'intersez. è essa stessa un elem. di $\mathcal{B}$). Dalla prop. segue: esiste una topologia $\mathcal{T}$ che ha $\mathcal{B}$ come base. $\mathcal{T}$ si dice topologia di Zariski su K^n.

Parte interna, chiusura, intorni

Def.: Sia X spazio topologico e $D \subseteq X$ sottoins. qualsiasi.

Definiamo:

la parte interna di D: $D^\circ = \bigcup_{\substack{A \subseteq D \\ A \text{ aperto}}} A$

la chiusura di D: $\overline{D} = \bigcap_{\substack{C \supseteq D \\ C \text{ chiuso}}} C$

la frontiera di D: $\partial D = \overline{D} \setminus D^\circ$

I punti di D° si dicono interni a D, quelli di $\overline{D}$ si dicono aderenti a D.

Oss.: D° è aperta, anzi è il più grande aperto contenuto in D, perché contiene tutti gli aperti contenuti in D. Analogam. $\overline{D}$ è chiusa, anzi è il più piccolo chiuso contenente D. Anche ∂D è chiusa, perché

$$\partial D = \overline{D} \setminus D^\circ = \underbrace{\overline{D}}_{\text{chiusi}} \cap \underbrace{(X \setminus D^\circ)}_{\text{chiusi}}$$

Esempi: 1) $X = \mathbb{R}$ con top. euclidea e $D = [0,1]$, allora

$$D^\circ = \bigcup_{\substack{A \subseteq]0,1[\\ A \text{ ap.}}} A =]0,1[$$

Infatti se $a \in \underbrace{]0,1[}_{\text{aperto}} \subseteq D$ allora $a \in D^\circ$, invece $0 \notin D^\circ$ perché se esistesse un aperto A con $0 \in A \subseteq [0,1]$ allora A conterrebbe un intervallo aperto $]b,c[$ contenente 0: assurdo perché $A \subseteq [0,1]$. Analogamente $1 \notin D^\circ$, quindi $D^\circ =]0,1[$.

Esercizio: dim. che $\overline{]0,1[} = [0,1]$ (sempre in top. euclidea).

2) $X = \mathbb{R}$ con topologia cofinita. Allora nessun aperto non vuoto è contenuto in $[0,1]$, quindi con questa topologia abbiamo

$$[0,1]^\circ = \emptyset \qquad (!)$$

3) $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}$ topologia per cui A aperto $\Leftrightarrow$ $A = \emptyset$ opp. $A \ni 0$.

Allora $\overline{\{1\}} = \{1\}$ (infatti $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ è aperto, $\{1\}$ è chiuso)

ma $\overline{\{0\}} = \mathbb{R}$ (!) perché se C è un chiuso contenente $\{0\}$, allora $\mathbb{R} \setminus C$ è un aperto $\not\ni 0$, per cui $\mathbb{R} \setminus C = \emptyset$ e $C = \mathbb{R}$.

<u>Def.</u>: $D \subseteq X$ si dice <u>denso</u> se $\overline{D} = X$.

<u>Esempio</u>: $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea; $D = \mathbb{Q}$ è denso, infatti sia C chiuso contenente $\mathbb{Q}$, allora $\mathbb{R} \setminus C$ è un aperto che non interseca $\mathbb{Q}$. Ma ogni intervallo aperto (non vuoto) ha elementi di $\mathbb{Q}$, quindi per forza $\mathbb{R} \setminus C = \emptyset$, $C = \mathbb{R}$. Segue

$$\overline{\mathbb{Q}} = \bigcap_{\substack{C \supseteq \mathbb{Q} \\ C \text{ chiuso}}} C = \mathbb{R} .$$

<u>Osservazione:</u> 1) Per ogni $D \subseteq X$, vale

$$X \setminus \left(\overline{D}\right) = \left(X \setminus D\right)^{\circ}$$

infatti $X \setminus \left(\overline{D}\right) = X \setminus \left(\bigcap_{\substack{C \supseteq D \\ C \text{ chiuso}}} C\right) =$

$$= \bigcup_{\substack{C \supseteq D \\ C \text{ chiuso}}} \left(X \setminus C\right) = \dots$$

D'altronde: $C \supseteq D$ e C chiuso $\iff$ $X \setminus C \subseteq X \setminus D$ e $X \setminus C$ aperto

quindi chiamando $A = X \setminus C$ abb.

$$\dots = \bigcup_{\substack{A \subseteq X \setminus D \\ A \text{ aperto}}} A = \left(X \setminus D\right)^{\circ}$$

2) D denso $\iff$ D interseca ogni aperto non vuoto

(dim. per esercizio)

Def.: Siano X sp. topologico, $x \in X$. Un sottoinsieme $U \subseteq X$ si dice <u>intorno</u> di x se $\exists A \subseteq X$ aperto tale che

$$x \in A \subseteq U.$$

La famiglia di tutti gli intorni di x è denotata come:

$$\mathcal{I}(x) = \{ U \subseteq X \mid U \text{ è intorno di } x \}$$

Esempio: $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea, $x = 0$

allora $]-1,1[$ e $[-1,1]$ sono entrambi intorni di x, verifichiamo la def.:

$$x \in \underbrace{]-1,1[}_{= A} = \underbrace{]-1,1[}_{= U = A \text{ è esso stesso aperto}}$$

$$x \in \underbrace{]-1,1[}_{= A} \subseteq \underbrace{[-1,1]}_{= U}$$

o anche

$$x \in \left]-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}\right[\subseteq [-1,1]$$

Oss.: 1) Dati $U \subseteq X$ e $x \in X$:

$$U \text{ è intorno di } x \iff x \in U^\circ$$

2) U è aperto $\iff$ è intorno di ogni suo punto (esercizio del foglio n. 1)

3) $\forall U$ vale $(U^\circ)^\circ = \bigcup_{\substack{A \subseteq X \text{ ap.} \\ A \subseteq U^\circ}} A = \bigcup_{\substack{A \subseteq X \text{ ap.} \\ A \subseteq U}} A = U^\circ$. Analogamente $\overline{(\overline{U})} = \overline{U}$

sono uguali perché se A è aperto e $A \subseteq U$ allora $A \subseteq U^\circ$, verifica facile!

<u>Lemma</u>: Siano X sp. topologico, $x \in X$, $D \subseteq X$. Allora

$$x \in \overline{D} \iff \forall U \in \underset{\sim}{I}(x):\ D \cap U \neq \emptyset.$$

<u>Dim.</u>: $\Rightarrow)$ Supp. $x \in \overline{D}$ e sia $U \in \underset{\sim}{I}(x)$. Supp. per assurdo

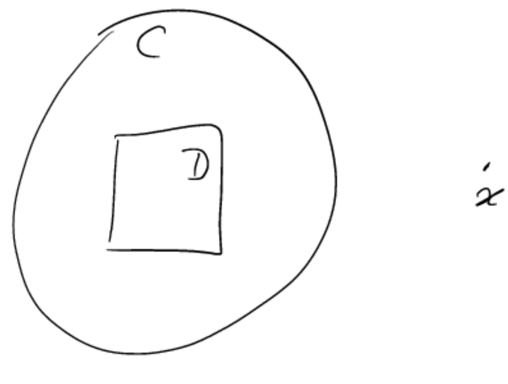
$D \cap U = \emptyset$, e sia $A \subseteq X$ aperto tale che $x \in A \subseteq U$

Allora $D \cap A = \emptyset$.

Consid. $X \setminus A = C$, che è chiuso. Abb. $C \not\ni x$ perché $x \in A$, e $C \supseteq \overline{D}$ perché $\overline{D}$ è l'intersez. di tutti i chiusi che cont. D. Allora $\overline{D} \not\ni x$: assurdo.

$\Leftarrow)$ Per assurdo sia $x \notin \overline{D}$. Allora x non è in tutti i chiusi che cont. D, quindi c'è un chiuso C con $x \notin C \supseteq D$.

Consid. $A = X \setminus C$, è un aperto che contiene x, quindi $A \in \underset{\sim}{I}(x)$, ma A non interseca D: <u>assurdo</u>.



$\square$

<u>Def.</u>: Siano X sp. top., $x \in X$. Una famiglia $J \subseteq \underset{\sim}{I}(x)$ di intorni di x è detta <u>sistema fondamentale di intorni</u> di x, o <u>base locale</u> in x, se

$$\forall U \in \mathcal{I}(x)\ \exists V \in \mathcal{J} \mid V \subseteq U.$$

Esempio: $X = \mathbb{R}$ con top. euclidea, $x \in \mathbb{R}$ qualsiasi.

$$\mathcal{J} = \{]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\mid \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \}$$

$$\mathcal{J}' = \{ [x-\tfrac{1}{n}, x+\tfrac{1}{n}] \mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \}$$

sono sist. fond. di intorni. Infatti sono intorni, e

(verifica della def.: $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[= U = A \ni x$

$[x-\tfrac{1}{n}, x+\tfrac{1}{n}] = U \supseteq A =]x-\tfrac{1}{n}, x+\tfrac{1}{n}[\ni x$)

dato un intorno $U \ni x$ esiste un aperto A t.c. $U \supseteq A \ni x$, visto che A è aperto $\exists \delta > 0 \mid]x-\delta, x+\delta[\subseteq A$. Scegliamo $n \geq \frac{1}{\delta}$, e $\varepsilon = \delta$, allora

$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ appartiene a $\mathcal{J}$ ed è cont. in U

$]x-\tfrac{1}{n}, x+\tfrac{1}{n}[$ ——, ——

Esercizio: Dim. che $\mathcal{J}'' = \{ [x-\tfrac{1}{n}, x+\tfrac{2}{n}[+ \{x+\tfrac{3}{n}\} \mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \}$ è sist. fond. di intorni di $x \in \mathbb{R}$ con top. euclidea.

Applicazioni continue

Def: Siano X, Y spazi topologici. Un'appl. $f: X \to Y$ si dice *continua* se $\forall A \subseteq Y$ aperto: $f^{-1}(A)$ è aperto.

<u>Esempi:</u> 1) Se X ha top. discreta, ogni appl. $X \to Y$ è continua.

2) Se Y ha top. banale, ogni appl. $X \to Y$ è continua.

3) Se X e Y hanno top. cofinita, e $f: X \to Y$ è iniettiva, allora è continua. Infatti sia $A \subseteq Y$ aperto. Se $A = \emptyset$ allora $f^{-1}(A) = \emptyset$ quindi $f^{-1}(A)$ è aperto. Altrimenti $Y \setminus A$ è finito, e $f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$ è il complem. di $X \setminus f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \notin A\}$ che è uguale a

$\{x \in X \mid f(x) \in Y \setminus A\} = f^{-1}(Y \setminus A)$. Visto che $Y \setminus A$ è un ins. finito, e f è iniettiva, allora $f^{-1}(Y \setminus A)$ è un ins. finito, perciò $f^{-1}(A)$ è aperto.

<u>Oss.:</u> Per ogni sottoinsieme $A \subseteq Y$ vale

$$X \setminus f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \notin A\} = \{x \in X \mid f(x) \in Y \setminus A\}$$
$$= f^{-1}(Y \setminus A)$$

D'altronde gli insiemi $Y \setminus A$ con A aperto sono esattam.

i chiusi di Y. Quindi: f continua $\iff$

$f^{-1}(A)$ ap. $\forall A \subseteq Y$ aperto $\iff$ $X \setminus f^{-1}(A)$ chiuso $\forall A \subseteq Y$ ap.

$\iff f^{-1}(Y \setminus A)$ chiuso $\forall A \subseteq Y$ ap $\iff$ $\boxed{f^{-1}(C) \text{ chiuso } \forall C \subseteq Y \text{ chiuso}}$

L'analogo della solita def. di funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua <u>in un punto</u> è:

<u>Def.</u>: Sia $f: X \to Y$ applicazione fra sp. topologici, e sia $p \in X$. f si dice <u>continua</u> <u>in p</u> se $\forall U \subseteq Y$ intorno di $f(p)$ $\exists V \subseteq X$ intorno di p tale che $f(V) \subseteq U$.

<u>Teorema</u>: Sia $f: X \to Y$ applicaz. fra sp. topologici. Sono equivalenti:

1) $\forall p \in X$: f è continua in p

2) $\forall Z \subseteq X$ sottoinsieme: $f(\overline{Z}) \subseteq \overline{f(Z)}$

3) f è continua.

<u>Dim.</u>: 1)$\Rightarrow$2) Sia $p \in \overline{Z}$, dim. che $f(p) \in \overline{f(Z)}$. Grazie a un lemma precedente, per dim. che $f(p) \in \overline{f(Z)}$ basta dim. che $f(Z) \cap U \neq \emptyset$ $\forall U \in I(f(p))$, quindi sia $U \in I(f(p))$.

Per 1), esiste $V \in I(p)$ con $f(V) \subseteq U$.

D'altronde $p \in \overline{Z}$, quindi per lo stesso Lemma vale

$V \cap Z \neq \emptyset$, ma allora $f(V \cap Z)$ contiene punti di U che sono anche in $f(Z)$, cioè $U \cap f(Z) \neq \emptyset$.

$2) \Rightarrow 3)$ Usiamo il fatto già visto: f continua $\Leftrightarrow f^{-1}(C)$ è chiuso $\forall C \subseteq Y$ chiuso. Sia allora $C \subseteq Y$ chiuso, consid.

$f^{-1}(C)$ e la sua chiusura $\overline{f^{-1}(C)}$. Abb.

$$f\left(\overline{f^{-1}(C)}\right) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} = \overline{f(X) \cap C} \subseteq C$$

$f(f^{-1}(C)) = C \cap f(X)$

perché C è chiuso e contiene $f(X) \cap C$

Da questo segue $\overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(C)$, ma in generale la chiusura contiene il sottoinsieme, da cui $\overline{f^{-1}(C)} = f^{-1}(C)$, cioè $f^{-1}(C)$ è chiuso.

$3) \Rightarrow 1)$ Sia $p \in X$, verifichiamo che f è continua in p, quindi sia $U \in \mathcal{I}(f(p))$, sia $A \subseteq Y$ aperto con $U \supseteq A \ni f(p)$, allora $f^{-1}(A)$ è aperto, contiene p, e $f(f^{-1}(A)) \subseteq A \subseteq U$, quindi poss. scegliere $V = A$.

$\square$

<u>Proposizione</u>: La composizione di due appl. continue qualsiasi è continua.

<u>Dim.</u>: Cioè date $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ dove X, Y, Z sono sp. top. e f, g sono continue, va dim. che $g \circ f$ è

continua. Sia $A \subseteq Z$ aperto, allora

$$(g \circ f)^{-1}(A) = \{ x \in X \mid g(f(x)) \in A \} =$$

$$= \{ x \in X \mid f(x) \in g^{-1}(A) \} =$$

$$= f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(A)}_{\uparrow \text{ap. in } Y}) = \text{ap. in } X$$

$\square$

<u>Def.</u>: Siano X, Y sp. topologici, $f: X \to Y$ un'applicazione.

1) f si dice <u>omeomorfismo</u> se f è biiettiva, continua, e $f^{-1}: Y \to X$ è continua.
2) X e Y si dicono <u>omeomorfi</u> se esiste $f: X \to Y$ omeomorfismo.
3) f (non nec. omeom., non nec. continua) si dice <u>aperta</u> se $f(A)$ è aperto $\forall A \subseteq X$ aperto. Invece f si dice <u>chiusa</u> se $f(C)$ è chiuso $\forall C \subseteq X$ chiuso.

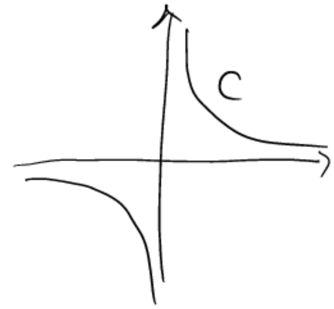
<u>Esempio</u>: Esempio <u>importante</u> di applicazione <u>non chiusa</u>:

$$\pi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x,y) \longmapsto x$$

dove mettiamo la top. euclidea su $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$.

π non è chiusa, perché ad es.

$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1 \}$



è chiuso, verifica:

$$C = m^{-1}(\{1\})$$

dove poniamo $m : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto xy$, che è continua, $\{1\}$ è chiuso

in top. euclidea (infatti $\mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ è aperto),

quindi C è chiuso. Ma $\pi(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ <u>non</u> è chiuso!

<u>Esercizio:</u> Dimostrare che $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a,b) \longmapsto a+b$ <u>non</u> è chiusa ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$ con top. euclidea)

Spazi metrici

<u>Def.:</u> Sia X un insieme. Un'applicazione $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice <u>distanza</u> se valgono:

1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$, e $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$

3) $\underbrace{d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)}_{\text{disuguaglianza triangolare}} \quad \forall x,y,z \in X$

In tal caso (X, d) (o semplicem. X) si dice <u>spazio metrico</u>.

Esempi: 1) Sia X un insieme qualsiasi, definiamo

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{come } d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

Questa d è una distanza, l'unica verifica da fare è 3), dove il rischio sarebbe avere $0+0 \geq 1$, ma se $d(x,y)+d(y,z)=0$ allora $x=y=z$ e quindi $d(x,z)=0$

2) In $\mathbb{R}^n$:

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2} \qquad x=(x_1,\ldots,x_n) \quad y=(y_1,\ldots,y_n)$$

$$d_1(x,y) = \sum_i |x_i - y_i|$$

$$d_\infty(x,y) = \max_i |x_i - y_i|$$

Def: Sia (X,d) sp. metrico, $x \in X$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

1) La palla aperta di centro x e raggio ε è

$$B_\varepsilon(x) = \{ y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon \}$$ ($= B^d_\varepsilon(x)$ se vogliamo specificare che usiamo d)

2) La topologia indotta da d su X è definita come:

$$A \text{ aperto} \iff \forall a \in A \ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \mid B_\varepsilon(a) \subseteq A$$

La denotiamo con $\mathcal{T}_d$.

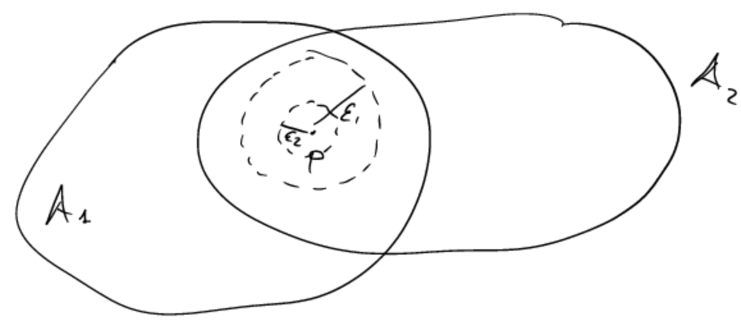
Verifichiamo che $\mathcal{T}_d$ è una topologia:

1) $X, \emptyset \in \mathcal{T}_d$: ovvio

2) unioni di el. di $\mathcal{T}_d$ sono in $\mathcal{T}_d$; ovvio

3) Siano $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_d$, verifichiamo che $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_d$. Sia $p \in A_1 \cap A_2$, scegliamo $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ t.c.

$$B_{\varepsilon_i}(p) \subseteq A_i \quad \forall i \in \{1, 2\}.$$



sia $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, allora $\varepsilon > 0$ e $B_\varepsilon(p) \subseteq A_1 \cap A_2$ quindi $A_1 \cap A_2$ è aperto.

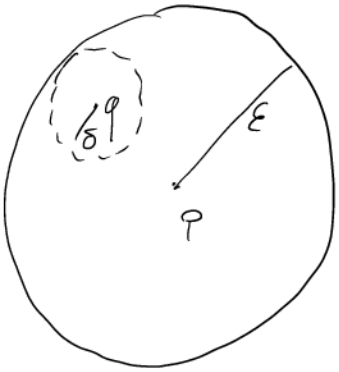
<u>Lemma</u>: Sia (X, d) spazio metrico e $\mathcal{T}_d$ la topologia indotta da d.

1) $\forall p \in X \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$: $B_\varepsilon(p)$ è aperto in $\mathcal{T}_d$

2) Ogni aperto di $\mathcal{T}_d$ è unione di palle aperte, cioè $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(p) \mid p \in X, \ \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\}$ è una base di $\mathcal{T}_d$

3) Un sottoins. $U \subseteq X$ è intorno di un punto $p \in X$ se e solo se $\exists \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(p) \subseteq U$.

Dim.: 1) Sia $q \in B_\varepsilon(p)$, poniamo $\delta := \varepsilon - d(p,q)$ (è >0)



e abb. $B_\delta(q) \subseteq B_\varepsilon(p)$ perché

$\forall x \in B_\delta(q)$ vale $d(x,p) \le$

$$d(x,q) + d(q,p) < \big(\varepsilon - d(p,q)\big) + d(q,p) =$$
$$= \varepsilon$$

2) Sia $A \subseteq X$ aperto, per ogni $a \in A$ scegliamo $\varepsilon_a \in \mathbb{R}_{>0}$ t.c. $B_{\varepsilon_a}(a) \subseteq A$, allora

$$A = \bigcup_{a \in A} B_{\varepsilon_a}(a)$$

3) U intorno di $p \Rightarrow \exists A \subseteq U$ ap. con $A \ni p \Rightarrow$

$\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \mid B_\varepsilon(x) \subseteq U \Rightarrow$ U è intorno di p

$B_\varepsilon(x)$ è aperto per 1)

$\square$

Oss.: Gli spazi metrici sono un po' simili a $\mathbb{R}^n$ con top. euclidea, ma possono succedere anche cose inaspettate! Ad esempio dati $p \in X$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ l'insieme

$$\{x \in X \mid d(p,x) \le \varepsilon\}$$

è un chiuso, <u>ma non</u> è sempre la chiusura di $B_\varepsilon(p)$! (v. esercizi foglio n. 2).

Proposizione: Siano X, Y spazi metrici, $f: X \longrightarrow Y$ un'applicazione.

f continua $\iff$ $\forall p \in X \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \,|$ se $d(x, p) < \delta$ per un $x \in X$, allora $d(f(x), f(p)) < \varepsilon$

Dim.: f continua $\overset{\text{già visto}}{\iff}$ f continua in p $\forall p \in X$ $\underset{\text{esercizio}}{\iff}$ $\forall p \in X \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \,|$

$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$

$\square$

Corollario: Siano d, h distanze su un insieme X, allora $\mathcal{T}_d$ è più fine di $\mathcal{T}_h$ se e solo se $\forall p \in X \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \,|$
$B^d_\delta(p) \subseteq B^h_\varepsilon(p)$.

Dim.: Consid. l'identità $id_X : X \longrightarrow X$. Abbiamo:

$\mathcal{T}_d$ più fine di $\mathcal{T}_h \iff id_X : X \to X$ è continua, dove in X come <u>codominio</u> prendiamo la topologia $\mathcal{T}_h$, e in X come <u>dominio</u> prendiamo la topologia $\mathcal{T}_d$.

La continuità di id_X è equivalente alla condiz. del corollario grazie alla prop. precedente.

$\square$

Def: Due distanze d, h su un insieme X si dicono equivalenti se $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_h$.

Esempio: Su $\mathbb{R}^n$ la distanza euclidea d e le distanze d_1 e d_∞ sono equivalenti, grazie al corollario precedente e alle disuguaglianze

$$d_\infty(x,y) \leq d(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n\, d_\infty(x,y)$$

che valgono $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Def.: Sia X uno spazio topologico. Se esiste una distanza su X che induce la topologia già data su X, allora lo sp. top. X si dice metrizzabile.

Sottospazi topologici

Def.: Sia X spazio topologico, $Y \subseteq X$ sottoinsieme qualsiasi. Su Y è definita una topologia detta di sottospazio, nel modo seguente:

$A \subseteq Y$ aperto in top. di sottosp. $\iff \exists B \subseteq X$ aperto $\mid B \cap Y = A$.

Esempi: 1) $X = \mathbb{R}$ con top. euclidea, $Y = [0,1]$. Gli aperti di Y con topologia di sottosp. sono ottenuti intersecando aperti di $X = \mathbb{R}$ con Y, ad es. $I =]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}[\subseteq \mathbb{R}$ è aperto di X, allora

$I \cap Y =]1/2, 2/3[= I$ è aperto (anche) di Y.

Ma: $\quad [0,\tfrac{1}{2}[= \underbrace{]-1,\tfrac{1}{2}[}_{\substack{\shortparallel \\ \text{aperto} \\ \text{di } X}} \cap Y$, quindi $[0,\tfrac{1}{2}[$ è aperto in $[0,1]$,

nel senso che $[0,\tfrac{1}{2}[$ è aperto in $[0,1]$ in topologia di sottospazio.

Ma $[0,\tfrac{1}{2}[$ <u>non</u> è aperto in X!

Analogam. $[0,1] = \underbrace{]-1,2[}_{\substack{\shortparallel \\ \text{ap. di } X}} \cap Y$ quindi $[0,1]$ stesso è aperto in $[0,1]$,

anche se $[0,1]$ non è aperto in $\mathbb{R}$.

2) Sempre $X = \mathbb{R}$ con top. euclidea, $Y = \mathbb{Z}$. La topologia di sottospazio di Y è la topologia discreta, infatti $\forall n \in Y$ abb.

$$\{n\} = \underbrace{]n-\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}[}_{\text{ap. in } X = \mathbb{R}} \cap \underset{\substack{\shortparallel \\ Y}}{\mathbb{Z}}$$

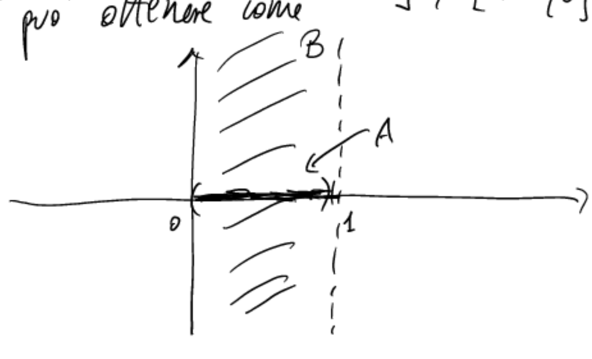
quindi $\forall n \in Y$: $\{n\}$ è aperto in Y. Visto che unioni qualsiasi di aperti è aperta, qualsiasi sottoins. di Y è aperto in questa topologia.

3) $X = \mathbb{R}^2$ con top. euclidea, $Y = \mathbb{R} \times \{0\}$ ($\leftarrow$ cioè Y è l'asse x).

$A =]0,1[\times \{0\}$ è aperto in Y in top. di sottospazio? Sì, ad es. si può ottenere come

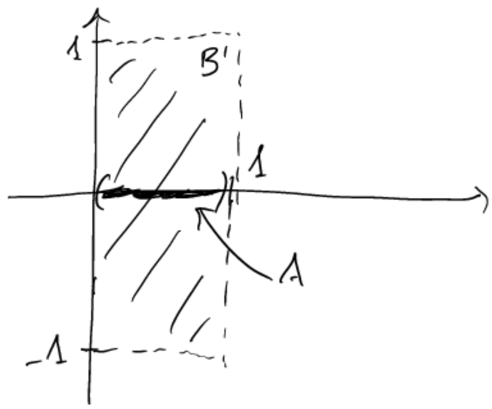
$$]0,1[\times \{0\} = \Big(\underbrace{]0,1[\times \mathbb{R}}_{B =}\Big) \cap Y$$

„striscia verticale illimitata"



oppure anche come $]0,1[\times \{0\} = \underbrace{\left( ]0,1[\times]-1,1[\right)}_{= B'} \cap Y$

B' = un „rettangolo aperto"



<u>Oss.</u>: Verifichiamo che la top. di sottospazio è effettivam. una topologia.

Denotiamo con $\mathcal{T}$ la top. su X, e poniamo

$$\mathcal{T}_Y = \{ A \subseteq Y \mid \exists B \in \mathcal{T} \mid B \cap Y = A \} \leftarrow \text{„candidata topologia"}$$

Verifichiamo gli assiomi di topologia per $\mathcal{T}_Y$:

1) $\emptyset = \underset{\in \mathcal{T}}{\underset{\uparrow}{\emptyset}} \cap Y, \quad Y = \underset{\in \mathcal{T}}{\underset{\uparrow}{X}} \cap Y$, quindi $\emptyset, Y \in \mathcal{T}_Y$

2) Siano $A_i \in \mathcal{T}_Y \quad \forall i \in I$, scegliamo $B_i \in \mathcal{T}$ con $B_i \cap Y = A_i$, allora

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B_i \cap Y) = \underbrace{\left(\bigcup_{i \in I} B_i \right)}_{\in \mathcal{T}} \cap Y$$

da cui $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}_Y$.

3) Siano $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_Y$, scegliamo $B_i \in \mathcal{T}$ con $B_i \cap Y = A_i$ $\forall i \in \{1,2\}$, e allora

$$A_1 \cap A_2 = (B_1 \cap Y) \cap (B_2 \cap Y) = \underbrace{(B_1 \cap B_2)}_{\in \mathcal{T}} \cap Y$$

quindi anche $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_Y$.

Oss.: Sia $C \subseteq Y$ chiuso in top. di sottospazio, allora $A = Y \setminus C$ è aperto, quindi esiste $B \subseteq X$ aperto in X t.c. $A = B \cap Y$, cioè $A = B \cap Y$. Consid. $X \setminus B$, che è chiuso in X. Vale

$$C = Y \setminus A = Y \setminus (B \cap Y) = Y \setminus B = Y \cap (X \setminus B).$$

Quindi: C è chiuso in Y $\Rightarrow$ esiste un chiuso D $(= X \setminus B)$ tale che $C = Y \cap D$. Vale anche il viceversa "$\Leftarrow$": esercizio.

Oss.: Sia $Y \subseteq X$ con top. di sottospazio, consid. l'inclusione di Y in X:

$$\begin{aligned} \iota : Y &\longrightarrow X \\ y &\longmapsto y \end{aligned}$$

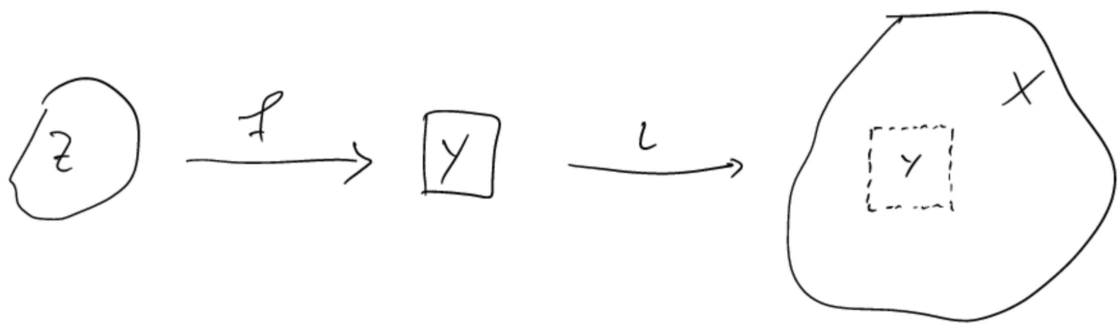
L'inclusione ι è continua, verifica: sia $B \subseteq X$ aperto, allora $\iota^{-1}(B) = B \cap Y$ che è aperto in topologia di sottospazio.

Supponiamo ora Y abbia una top. diversa da quella di sottospazio, mettiamo T, e supp. però $\iota: Y \to X$ sempre continua. Allora gli insiemi del tipo $Y \cap B$ con $B \subseteq X$ aperto devono comunque essere in T, cioè:

$$T \supseteq \{ Y \cap B \mid B \text{ aperto di } X \} \; (= \text{topologia di sottosp.})$$

Cioè la top. di sottospazio su Y è la <u>meno fine</u> fra quelle per cui l'inclusione $\iota: Y \to X$ è continua.

<u>Proposizione:</u> Siano X sp. topologico, $Y \subseteq X$ con top. di sottosp., Z uno sp. top., e $f: Z \to Y$. L'appl. f è continua se e solo se $\iota \circ f: Z \to X$ è continua.



<u>Dim.:</u> $\Rightarrow$) ovvio perché composiz. di appl. continue è continua.

$\Leftarrow$) Supp. $\iota \circ f$ continua, dim. che f è continua. Sia $A \subseteq Y$ aperto in Y, sia $B \subseteq X$ aperto in X tale che $A = Y \cap B$, allora $f^{-1}(A) = \{ z \in Z \mid \underbrace{f(z)}_{\in Y} \in A \}$ è uguale anche a $\{z\in Z \mid \underbrace{\iota(f(z))\in A}_{\overset{\shortparallel}{f(z)\in Y}}\} = \{z\in Z \mid \iota(f(z))\in B\} = (\iota\circ f)^{-1}(B)$

un punto di Y è anche in B se e solo se è in A

e $(\iota\circ f)^{-1}(B)$ è aperto in Z.

$\square$

<u>Oss.:</u> Data $f: X\to Y$, consid. la restrizione del codominio $\tilde{f}: X \to f(X)$, $x \mapsto f(x)$. Vale: f continua $\iff$ $\tilde{f}$ continua, infatti $f = \iota\circ\tilde{f}$ dove

$$\iota: f(X) \to Y,\quad z \mapsto z$$ è l'inclusione.

Dati X sp. top. e Y con top. di sottospazio, consid. un sottoins. $Z\subseteq Y$. Parte interna e chiusura di Z come sottoins. <u>di X</u> possono essere <u>diverse</u> da parte interna e chiusura di Z come sottoinsieme <u>di Y</u>.

<u>Esempio:</u> $X=\mathbb{R}$ con top. euclidea, $Y=[0,1[$ con top. di sottosp., $Z =]0,1[$. Sappiamo: come s. ins. di X, la chiusura di Z è $[0,1]$. Ma come sottoins. di Y la chiusura di Z è $[0,1[$ (verifica: <u>esercizio</u>).

Tuttavia vale:

$$[0,1[\;=\; Y \cap \underbrace{[0,1]}$$

chiusura di Z in <u>Y</u>

chiusura di Z in X

<u>Lemma</u>: Dati X, Y, Z come sopra, la chiusura di Z in Y è uguale all'interseз. di Y con la chiusura di Z in X.

<u>Dim.</u>: $\left(\text{chiusura di } Z \text{ in } Y\right) = \bigcap_{\substack{C \subseteq Y \\ C \text{ chiuso in } Y \\ C \supseteq Z}} C = \dots$

Per ogni C scegliamo un $D \subseteq X$ chiuso in X t.c. $C = Y \cap D$:

$$\dots = \bigcap_{\substack{C \subseteq Y \text{ chiuso in } Y \\ C \supseteq Z, \ D \text{ è scelto} \\ \text{fra i chiusi di } X \text{ tale che} \\ C = D \cap Y}} D \cap Y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{attenzione!}}}{=} \bigcap_{\substack{D \text{ chiuso} \\ \text{di } X,\ D \supseteq Z}} D \cap Y =$$

$$= \underbrace{\left(\bigcap_{\substack{D \text{ chiuso} \\ \text{di } X \text{ con} \\ D \supseteq Z}} D \right)}_{\text{chiusura di } Z \text{ in } \underline{X}} \cap Y .$$

$\square$

<u>ES.</u>: Attenzione: non vale la stessa cosa con la parte interna, ad es. $X = \mathbb{R}$ con top. euclidea, $Y = \mathbb{Z}$, $Z = \{0\}$. Allora la parte interna di Z come sottoins. di X è <u>vuota</u>, però Y con top. di sottospazio ha top. discreta, e Z è aperto in Y, quindi la parte interna di Z come sottoins. di Y è <u>Z stesso</u>.

Def.: Siano X, Y sp. top.. Un'applicaz. $f: X \to Y$ si dice <u>immersione</u> (topologica) se f è continua, iniettiva, e gli aperti di X sono tutti e soli i sottoinsiemi del tipo $f^{-1}(A)$ con $A \subseteq Y$ aperto.

Oss.: Data f iniettiva, vale:

f immersione $\iff$ la restrizione $\tilde{f}: X \to f(X)$, $x \mapsto f(x)$ è un omeom.

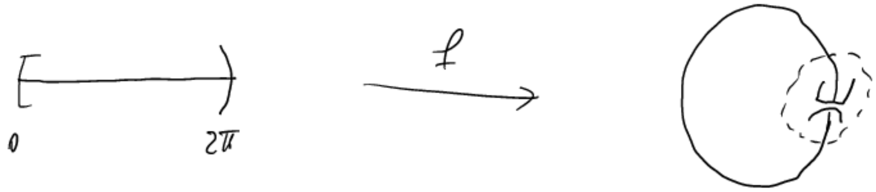
fra X e $f(X) (\subseteq Y)$ dotato della top. di sottospazio come sottoins. di Y

<u>Esercizio</u>: dimostrare quest'equivalenza.

<u>Esempi</u>: 1) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, 0)$ è un'immersione ($\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ con top. euclidea)

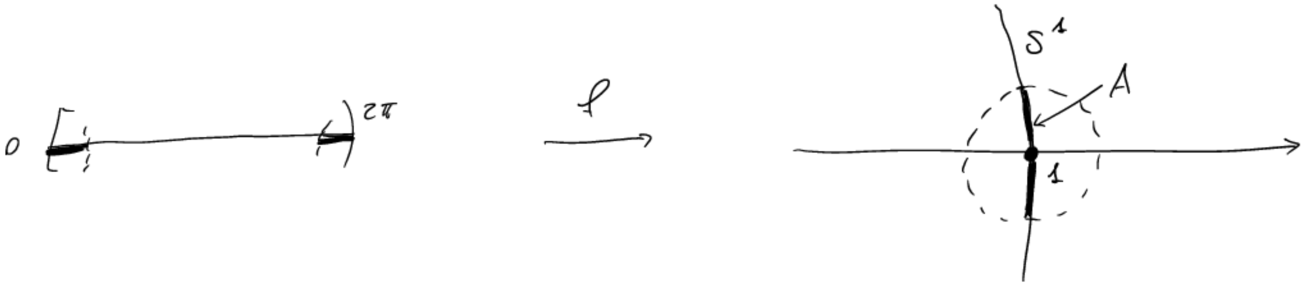
2) $f: [0, 2\pi[\to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$ ($[0,1[$ con top. euclidea, $\mathbb{C}$ anche identificandolo con $\mathbb{R}^2$)

è continua e iniettiva, ma non è un'immersione:



non è un omeom. fra $[0,2\pi[$ e $f([0,2\pi[) = S^1 \subseteq \mathbb{C}$

ad es. $[0, \pi[$ è un aperto di $[0, 2\pi[$, ma non è la controimm. di alcun aperto di S^1 messo in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ con top. di sottospazio. Infatti se ho un aperto $A \subseteq S^1$ contenente il punto $1 \in \mathbb{C}$, allora A contiene punti sopra <u>e sotto</u> l'asse reale,



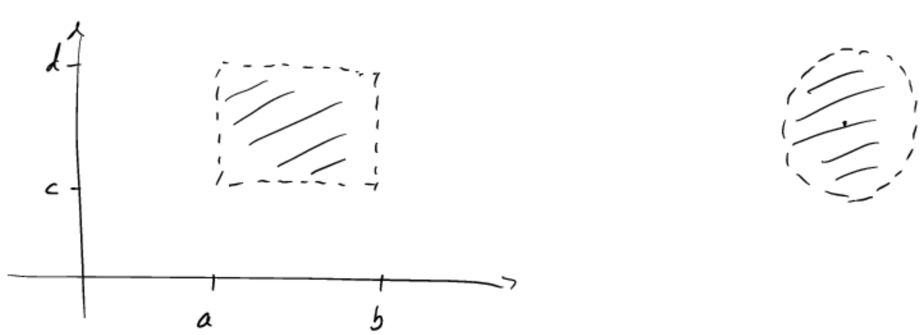
quindi la controimmagine di A contiene punti vicini al „bordo destro" di $[0, 2\pi[$, cioè $f^{-1}(A)$ deve contenere $]2\pi - \varepsilon, 2\pi[$ per qualche $\varepsilon > 0$, perciò <u>non esiste</u> A tale che $f^{-1}(A) = [0, \pi[$.

Prodotti di spazi topologici

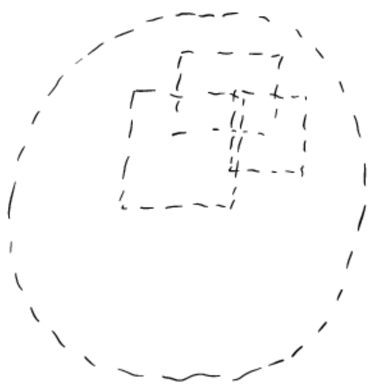
Siano P, Q sp. topologici, vogliamo definire una topologia „naturale" sul prodotto $P \times Q$.

<u>Esempio</u>: Consid. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con top. euclidea. Dovrebbe essere il prodotto di $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}$ con top. euclidea, descriviamo gli aperti di $\mathbb{R}^2$ con quest'idea in mente.

Intanto, dati $U \subseteq \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}$ aperti, il prodotto $U \times V$ è aperto. Ad es. se $U =]a, b[$, $V =]c, d[$, il prod. $U \times V$ è un rettangolo aperto:



Però ci sono aperti di $\mathbb{R}^2$ che non sono fatti così, ad es. un disco aperto. Tuttavia nel foglio di eserc. c'è un esercizio che dice „i rettangoli aperti sono una base della top. euclidea su $\mathbb{R}^2$":



infatti anche una palla aperta, che non è uguale a $U \times V$ per alcuna scelta di aperti $U, V \subseteq \mathbb{R}$, però si scrive come <u>unione</u> di aperti del tipo $U \times V$.

Questo esempio suggerisce che una base della top. su $P \times Q$ dovrebbe essere

$$\mathcal{B} = \{ U \times V \mid U \subseteq P, \ V \subseteq Q \ \text{aperti} \}$$

È vero, ma definiamo la top. su $P \times Q$ in modo <u>diverso</u>.

<u>Def.</u>: La <u>topologia prodotto</u> su $P \times Q$ è la meno fine che rende continue le proiezioni

$$p : P \times Q \longrightarrow P, \quad (x, y) \longmapsto x \qquad , \qquad q : P \times Q \longrightarrow Q, \quad (x, y) \longmapsto y$$

<u>Oss.</u>: Questa top. è ben definita, perchè è semplicem. l'intersezione di tutte le topologie possibili su $P \times Q$ per le quali le due

proiezioni sono continue.

<u>Teorema</u>: Siano P, Q spazi topologici, e $P \times Q$ con top. prodotto.

1) $\mathcal{B} = \{ U \times V \mid U \subseteq P \text{ aperto}, V \subseteq Q \text{ aperto} \}$ è una base della top. prodotto su $P \times Q$.

2) Per ogni $x_0 \in P$, $y_0 \in Q$ le applicazioni

$$p\big|_{P \times \{y_0\}} : \begin{array}{rcl} P \times \{y_0\} & \longrightarrow & P \\ (x, y_0) & \longmapsto & x \end{array} \qquad \text{e}$$

$$q\big|_{\{x_0\} \times Q} : \begin{array}{rcl} \{x_0\} \times Q & \longrightarrow & Q \\ (x_0, y) & \longmapsto & y \end{array}$$

sono omeomorfismi, dove stiamo consid. i sottoinsiemi $P \times \{y_0\}$ e $\{x_0\} \times Q$ di $P \times Q$ entrambi con top. di sottospazio.

3) Le proiezioni p e q sono (continue e) aperte.

4) Sia X sp. topologico, e sia $f : X \longrightarrow P \times Q$ un'applicazione. Allora f è continua se e solo se $p \circ f$ e $q \circ f$ sono continue

$$\begin{tikzcd} & & P \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[urr, bend left, "p \circ f"] \arrow[drr, bend right, "q \circ f"'] & P \times Q \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q"'] & \\ & & Q \end{tikzcd}$$

Dim.: 1) Verifichiamo prima che esiste una top. $\mathcal{T}$ su $P \times Q$ di cui $\mathcal{B}$ è una base, verificando le propr. viste in una proposizione:

a) $P \times Q$ dev'essere unione di elem. di $\mathcal{B}$: ok, basta prendere $U = P$, $V = Q$, cioè $P \times Q$ è un elem. di $\mathcal{B}$.

b) Siano $U, U' \subseteq P$ aperti, $V, V' \subseteq Q$ aperti, verif. che $W = (U \times V) \cap (U' \times V')$ si scrive come unione di elem. di $\mathcal{B}$.

Abbiamo
$$(U \times V) \cap (U' \times V') = \underbrace{(U \cap U')}_{\text{ap. in } P} \times \underbrace{(V \cap V')}_{\text{ap. in } Q}$$

quindi W è esso stesso un elem. di $\mathcal{B}$.

Concludiamo che $\mathcal{T}$ esiste, verifichiamo che è proprio la top. prodotto.
Prima di tutto, se mettiamo su $P \times Q$ la top. $\mathcal{T}$ allora p e q sono continue. Infatti dato $A \subseteq P$ aperto, abbiamo
$$p^{-1}(A) = A \times Q$$
che è un elem. di $\mathcal{B}$ e quindi è aperto per la top. $\mathcal{T}$. Analogamente, anche q è continua. Segue che la top. prodotto è meno fine di $\mathcal{T}$, per def. di topologia prodotto.
Viceversa, sia $U \times V$ un elem. di $\mathcal{B}$, con $U \subseteq P$ e $V \subseteq Q$ aperti.
Allora
$$U \times V = (U \times Q) \cap (P \times V) = p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$$
è intersez. di due aperti in topologia prodotto, perché p e q sono

continue se mettiamo su $P \times Q$ la top. prodotto. Allora ogni elem. di $\mathcal{B}$ è aperto per la topologia prodotto, per cui $\mathcal{T}$ è meno fine della topologia prodotto. Quindi le due topologie sono uguali, e $\mathcal{B}$ è base di entrambe.

2) Dim. che

$$p\big|_{P \times \{y_0\}} : P \times \{y_0\} \longrightarrow P$$
$$(x, y_0) \longmapsto x$$

è un omeomorfismo. Intanto è biiettiva e continua, perché le restrizioni (sul dominio) di appl. continue sono continue (è un esercizio dei fogli settimanali).

Verifichiamo che l'inversa è continua, chiamiamola φ:

$$\varphi : P \longrightarrow P \times \{y_0\}$$
$$x \longmapsto (x, y_0)$$

Dobbiamo dim. che $\varphi^{-1}(A)$ è aperto $\forall A \subseteq P \times \{y_0\}$ aperto, basta farlo per ogni aperto di una base (esercizio dei fogli settimanali). Inoltre, per ottenere una base per il sottospazio $P \times \{y_0\}$ di $P \times Q$, si può prendere una base di $P \times Q$

e intersecare tutti i suoi elem. col sottospazio (altro eserc. dei fogli settimanali). Usando $\mathcal{B}$, otteniamo la base

$$\left\{ (U \times V) \cap (P \times \{y_0\}) \;\middle|\; U \subseteq P,\ V \subseteq Q \text{ aperti} \right\}$$

del sottosp. $P \times \{y_0\}$. Dato $A = (U \times V) \cap (P \times \{y_0\})$ in questa base, vale:

$$A = \begin{cases} U \times \{y_0\} & \text{se } y_0 \in V \\ \emptyset & \text{se } y_0 \notin V \end{cases}$$

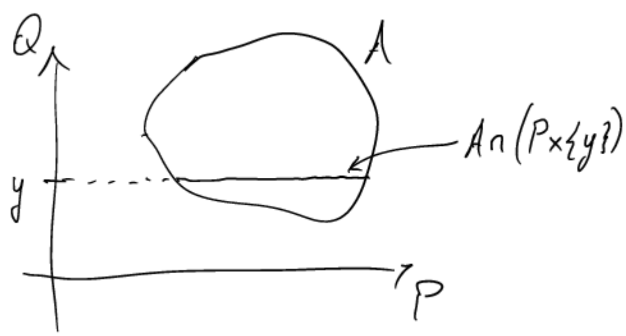
e quindi

$$\varphi^{-1}(A) = \begin{cases} U & \text{se } y_0 \in V \\ \emptyset & \text{se } y_0 \notin V \end{cases}$$

φ aggiunge la seconda comp. $= y_0$, φ^{-1} la toglie

per cui φ è continua.

Il ragionam. per $q|_{\{x_0\} \times Q} : \{x_0\} \times Q \longrightarrow Q$ è analogo.

3) 

Sia $A \subseteq P \times Q$ aperto, allora

$$A = \bigcup_{y \in Q} \underbrace{A \cap (P \times \{y\})}$$ ← non necess. aperto in $P \times Q$

e vale

$$p(A) = \bigcup_{y \in Q} p\left(A \cap (P \times \{y\})\right) =$$

$$= \bigcup_{y \in Q} p\big|_{P \times \{y\}} \left(A \cap (P \times \{y\})\right)$$

Ora $A \cap (P \times \{y\})$ è aperto nel sottosp. $P \times \{y\}$, e

$p\big|_{P \times \{y\}}$ è un omeomorfismo, quindi abbiamo scritto

$p(A)$ come unione di aperti di P, perciò $p(A)$ è aperto.

La dim. per Q è analoga.

4) Se $f : X \to P \times Q$ è continua anche $p \circ f$ e $q \circ f$ sono continue.

Viceversa, supp $p \circ f$ e $q \circ f$ continue e dim. che f è continua, cioè che se $A \subseteq P \times Q$ è aperto allora $f^{-1}(A)$ è aperto. Di nuovo, possiamo dimostrarlo anche solo per gli aperti A della base $\mathcal{B}$, quindi sia

$A = U \times V$ con $U \subseteq P$, $V \subseteq Q$ aperti.

Abbiamo:

$$f^{-1}(U \times V) = (p\circ f)^{-1}(U) \cap (q\circ f)^{-1}(V)$$

perché $x \in f^{-1}(U \times V)$ se e solo se la prima componente di $f(x)$ è in U (cioè $x \in (p\circ f)^{-1}(U)$) e la seconda è in V (cioè $x \in (q\circ f)^{-1}(V)$). Dalla continuità di $p\circ f$ e $q\circ f$ segue che $f^{-1}(U\times V)$ è aperto.

$\square$

<u>Oss.</u>: Una base della topologia prodotto si può ottenere anche fissando una base $\mathcal{B}_P$ per P e una base $\mathcal{B}_Q$ per Q, e prendere

$$\{ U \times V \mid U \in \mathcal{B}_P \text{ e } V \in \mathcal{B}_Q \}$$

(è un esercizio dei fogli settimanali)

<u>Esempi</u>: 1) $P = \mathbb{R}$, $Q = \mathbb{R}$ con top. euclidea. Prendiamo le basi

$$\mathcal{B}_P = \mathcal{B}_Q = \{]a,b[\mid a,b \in \mathbb{R},\ a<b \}$$

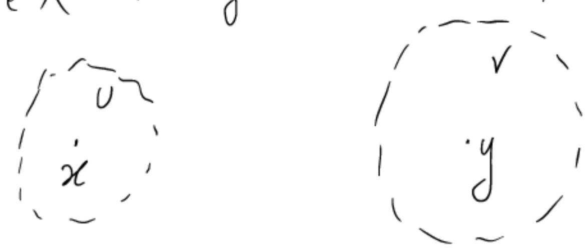
allora $\{]a,b[\times]c,d[\mid a,b,c,d \in \mathbb{R},\ a<b,\ c<d \}$ è una base della topologia prodotto su $\mathbb{R}^2$. Ma è anche una base della topologia euclidea su $\mathbb{R}^2$, quindi queste due topologie su $\mathbb{R}^2$ sono la stessa.

2) Si può dim che la topologia prodotto su $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dove su $\mathbb{R}$ mettiamo la top. di Zariski, <u>non è</u> la topologia di Zariski su $\mathbb{R}^2$.

<u>Spazi di Hausdorff</u>

<u>Def.</u>: Uno spazio topologico X si dice <u>di Hausdorff</u> (o <u>T2</u>) se

$$\forall x, y \in X \text{ con } x \neq y: \quad \exists U \in I(x),\ V \in I(y) \mid U \cap V = \emptyset.$$



<u>Oss.</u>: Esistono $A \subseteq U$ e $B \subseteq V$ aperti con $x \in A \subseteq U$, $y \in B \subseteq V$, quindi A e B sono intorni ap. di x, y rispettivam., disgiunti. Quindi nella def. possiamo anche assumere U, V intorni <u>aperti</u>.

<u>Esempi</u>: 1) Ogni spazio metrico è di Hausdorff, basta prendere U e V palle aperte di raggi abb. piccoli.

2) Se X ha topologia banale, allora dipende da $|X|$:

- se $|X| \leq 1$ allora X è T2,
- se $|X| \geq 2$ allora X <u>non</u> è T2.

3) Se X ha topologia cofinita, allora di nuovo dipende da $|X|$:

- se $|X|$ è finita, la top. è discreta e X è T2
- se $|X|$ è infinita allora due aperti non vuoti si intersecano sempre, perciò X non è T2.

Lemma: Se uno sp. top. X è di Hausdorff, allora i suoi sottoinsiemi finiti sono chiusi (in particolare $\{x\}$ è chiuso $\forall x \in X$).

Dim.: Dim. che $\{x\}$ è chiuso; sia $y \in X \setminus \{x\}$, e scegliamo un intorno $V_y \in \mathcal{I}(y)$ che non contenga x (esiste grazie alla def. di T2). Poss. supporre V_y intorno aperto.

Allora $$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V_y$$ quindi $\{x\}$ è chiuso.

Unioni finite di chiusi sono chiuse, da cui segue il lemma.

$\square$

Proposizione: Sottospazi e prodotti di spazi di Hausdorff sono di Hausdorff.

Dim.: Sia $Y \subseteq X$ sottosp. di X di Hausdorff, siano $y, y' \in Y$ con $y \neq y'$.

Scegliamo $\underbrace{U \in \mathcal{I}(y),\ U' \in \mathcal{I}(y')}_{\text{intorni in } X}$ con $U \cap U' = \emptyset$, poss. supporre U e U' intorni aperti (in X). Allora

$$y \in \overbrace{U \cap Y}^{\text{aperto in } Y} = \text{intorno aperto di } y \text{ in } Y, \quad y' \in U' \cap Y = \text{intorno aperto di } y' \text{ in } Y,$$

e $(U \cap Y) \cap (U' \cap Y) = \emptyset$, quindi Y è di Hausdorff.

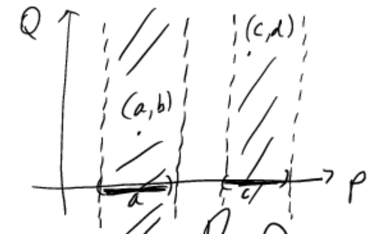
Siano ora P, Q sp. top. di Hausdorff, dim. che $P \times Q$ è di H..

Siano $(a,b) \neq (c,d) \in P \times Q$, allora $a \neq c$ opp. $b \neq d$ (o entrambe le cose). Supp. $a \neq c$, scegliamo intorni aperti disgiunti U di a e V di c in P.

Allora

$$(a,b) \in U \times Q = \text{intorno aperto di } (a,b) \text{ in } P \times Q$$

$$(c,d) \in V \times Q = \text{---}\,,\text{---} \quad (c,d) \quad \text{---}\,,\text{---}$$



e $$(U \times Q) \cap (V \times Q) = \underbrace{(U \cap V)}_{\emptyset} \times Q = \emptyset .$$

Il ragionam. nel caso $a = c$ e $b \neq d$ è analogo, per cui $P \times Q$ è di Hausdorff.

$\square$

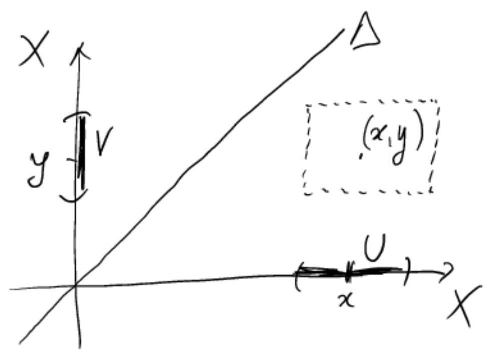
<u>Teorema</u>: Sia X sp. topologico, consid. $X \times X$ con topologia prodotto e la <u>diagonale</u> $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$. Vale:

$$X \text{ di Hausdorff} \iff \Delta \text{ è chiusa in } X \times X.$$

<u>Oss.</u>: L'idea intuitiva del teorema è questa: immaginiamo un elem. $x \in X$ che „varia", ad es. un elem. di una successione. Supp. „tenda" a un elem. $a \in X$, il che intuitivamente vorrebbe dire che x „entra" progressivamente in tutti gli intorni di a. Se X è di Hausdorff, dato $b \neq a$ allora x non può „tendere" <u>anche</u> a b. Ma allora, nel prodotto $X \times X$, la coppia (x,x) che è

in Δ se "tende" a una coppia (a,b) deve valere per forza $a=b$, cioè intuitivamente Δ è chiusa in $X\times X$.

<u>Dim. del teorema</u>: $\Rightarrow$) Supp. X T2, dim. che $(X\times X)\setminus\Delta$ è aperto, facendo vedere che è intorno di ogni suo punto. Sia allora $(x,y)\in(X\times X)\setminus\Delta$, quindi $x\neq y$. Scegliamo



intorni aperti disgiunti U di x e V di y.

Allora $U\times V$ è aperto in $X\times X$, contiene (x,y), e non interseca la diagonale Δ perché $U\cap V=\emptyset$. Segue: Δ chiusa in $X\times X$.

$\Leftarrow$) Supp. Δ chiusa nel prodotto, siano $x,y\in X$ con $x\neq y$, allora $(x,y)\in(X\times X)\setminus\Delta$. Essendo aperto, $(X\times X)\setminus\Delta$ è unione di elem. della base $\{U\times V \mid U\subseteq X,\ V\subseteq X \text{ aperti}\}$.

Quindi esistono $U\subseteq X$, $V\subseteq X$ aperti tali che $U\times V\subseteq(X\times X)\setminus\Delta$ e $U\times V\ni(x,y)$. Allora $x\in U$, $y\in V$, $U\cap V=\emptyset$, e X è T2.

$\square$

Corollario: Siano $f,g: X \longrightarrow Y$ applicaz. continue fra spazi topologici.
Se Y è di Hausdorff allora $\{x\in X \mid f(x)=g(x)\}$ è chiuso in X.

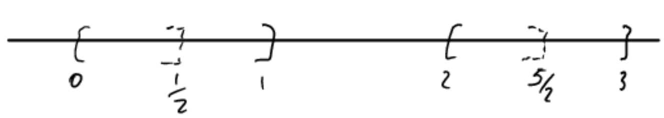
Dim.: Consid. l'applicazione
$$\varphi: X \longrightarrow Y\times Y, \quad x \longmapsto (f(x),g(x))$$
, cioè quella che ha componenti f e g. Sappiamo che φ è continua, d'altronde $C=\{x\in X \mid f(x)=g(x)\}$ è uguale a $\varphi^{-1}(\Delta)$ dove $\Delta\subseteq Y\times Y$ è la diagonale.
Per il teorema Δ è chiusa, da cui C è chiuso.

$\square$

Oss.: Data $f: X\to Y$ con Y di Hausdorff, e dato $y_0\in Y$, l'insieme $\{x\in X \mid f(x)=y_0\}$ è chiuso in X, essendo la controimm. $f^{-1}(\{y_0\})$ e $\{y_0\}$ è chiuso in Y.

Spazi topologici connessi

Es.: $\mathbb{R}$ con top. euclidea, $X=[0,1]\cup[2,3]$ con top. di sottosp..
Intuitivamente X non è „connesso", perché è fatto da due „pezzi" $[0,1]$ e $[2,3]$. Il sottoins. $[0,\frac12]$ è in X ma non è un „pezzo" di X, perché è „attaccato" a $]\frac12,1]$.



Neppure $[0,1]\cup[2,\frac52]$: non è un „pezzo" di X.

Quali proprietà distinguono $[0,1]$ e $[2,3]$ dagli altri sottoinsiemi di X?
Il fatto che sono entrambi contemporaneamente <u>aperti e chiusi</u> in X.

<u>Def.</u>: Uno spazio topologico X si dice <u>connesso</u> se gli unici sottoinsiemi contemporaneamente aperti e chiusi sono solo $\emptyset$ e X. Se X non è connesso si dice <u>sconnesso</u>.

<u>Esempi</u>: 1) Se $X = \emptyset$ è connesso, se $|X| = 1$ allora l'unica topologia possibile è $\{\emptyset, X\}$, e X è connesso. Anche se X ha cardinalità qualsiasi e top. banale è connesso.

2) Se $|X| \geq 2$ e X ha top. discreta allora X è sconnesso

3) $[0,1] \cup [2,3]$ dell'es. precedente è sconnesso.

4) Anche $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è sconnesso, infatti
$]-\infty, 0[\, = X \cap \,]-\infty, 0[$ è aperto in X ma anche chiuso:
$]-\infty, 0[\, = X \cap \,]-\infty, 0]$.

5) $\mathbb{Q}$ con top. di sottospazio indotta dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$ è <u>sconnesso</u>.
Infatti $[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}$ è chiuso in $\mathbb{Q}$, ma è <u>anche</u> aperto perché $[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q} = \,]\sqrt{2}, \sqrt{3}[\, \cap \mathbb{Q}$

Lemma: Sia X sp. topologico. Sono equivalenti:

1) X è sconnesso,
2) esistono aperti disgiunti non vuoti A_1, A_2 tali che $X = A_1 \cup A_2$,
3) esistono chiusi disgiunti non vuoti C_1, C_2 tali che $X = C_1 \cup C_2$.

Dim.: 1) $\Rightarrow$ 2) | Sia A_1 un sottoins. aperto e chiuso con $A_1 \neq X$, $A_1 \neq \emptyset$. Allora A_1 e $A_2 = X \setminus A_1$ sono aperti disgiunti non vuoti con $X = A_1 \cup A_2$.

2) $\Rightarrow$ 3) | Abbiamo $A_2 = X \setminus A_1$ e $A_1 = X \setminus A_2$ quindi sono anche chiusi, basta porre $C_1 = A_1$, $C_2 = A_2$.

3) $\Rightarrow$ 1) | Vale $C_2 = X \setminus C_1$ quindi C_1 e C_2 sono anche aperti, e diversi sia da X sia da $\emptyset$.

$\square$

Teorema: $[0,1]$ (con top. euclidea) è connesso.

Dim.: Sup. per assurdo $X = [0,1]$ sconnesso, e siano $C, D \subseteq X$ chiusi disgiunti non vuoti tali che $C \cup D = X$. Possiamo assumere $0 \in C$ (altrim. scambiamo C e D). Sia $d = \inf D$, e oss. che $d \in D$ perché D è chiuso. In particolare $d > 0$. L'insieme C contiene l'intervallo $[0, d[$, quindi contiene anche d perché C è chiuso: assurdo.

$\square$

Lemma: Sia X sp. top., e sia $Y \subseteq X$ un sottosp. connesso. Sia $A \subseteq X$ un sottoins. aperto e chiuso. Allora $Y \subseteq A$ opp. $Y \cap A = \emptyset$.

Dim.: L'intersez. $Y \cap A$ è aperta e chiusa in Y, quindi è uguale a Y (e allora $Y \subseteq A$) oppure è uguale a $\emptyset$.

$\square$

Definizione: Uno sp. top. X si dice <u>connesso per archi</u> se

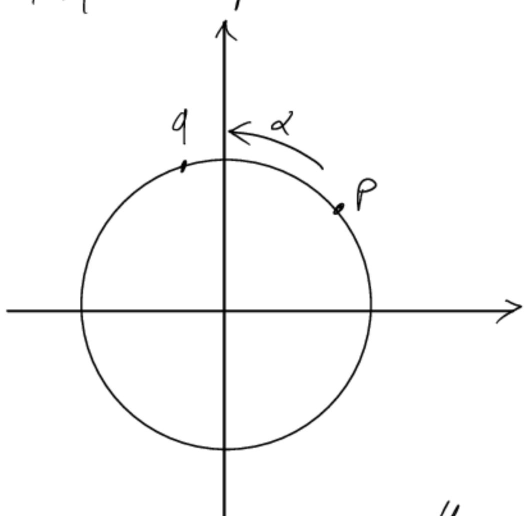
$$\forall p, q \in X \ \exists \alpha : [0,1] \longrightarrow X \ \text{continua} \mid \alpha(0) = p, \ \alpha(1) = q.$$

Una tale α si dice <u>cammino</u> da p a q.

Esempi: 1) $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi, basta prendere α che percorre il segmento da p a q.

2) $S^n = \{ p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\| = 1 \}$ è connessa per archi.

Verifica: per $n = 1$ è la circonferenza, dati due punti $p, q \in S^1$ possiamo scriverli come



$$p = (\cos(r), \sin(r))$$

$$q = (\cos(s), \sin(s))$$

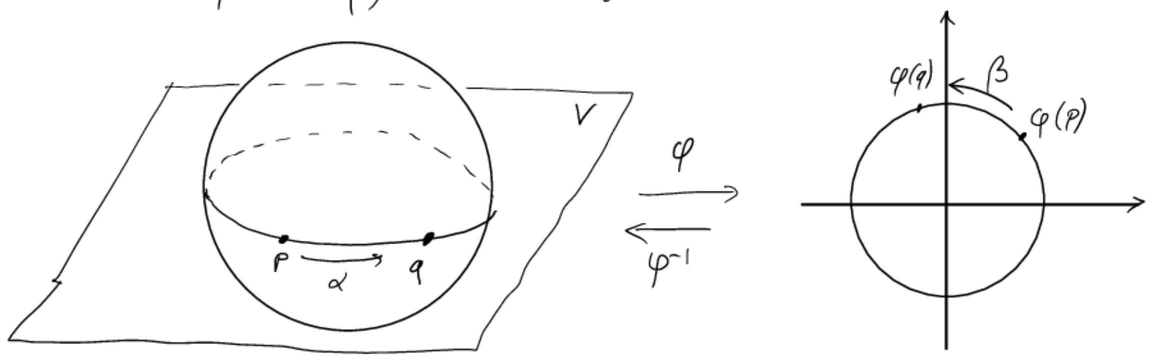
poniamo

$$\alpha : [0,1] \longrightarrow S^1$$

$$t \longmapsto \big(\cos((1-t)r+s), \sin((1-t)r-s)\big)$$

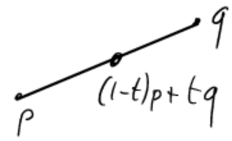
e allora $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$.

Per $n>1$, fissiamo $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottosp. vett. di dim. 2 contenente p e q, e scegliamo $\varphi: V \to \mathbb{R}^2$ un'isomorfismo



lineare ortogonale (cioè che preserva il prod. scalare). Allora $\varphi(V \cap S^n) = S^1$; scegliamo $\beta: [0,1] \to S^1$ cammino da $\varphi(p)$ a $\varphi(q)$, poi basta porre $\alpha: [0,1] \to S^n$ con $\alpha = \varphi^{-1} \circ \beta$.

3) Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (con topologia euclidea) con X convesso, cioè $\forall p, q \in X \ \forall t \in [0,1]: (1-t)p + tq \in X$.



Allora X è connesso per archi. Ad es. se X è una palla aperta allora è convesso (facile, usando la disug. triangolare) e quindi connesso per archi.

Teorema: Sia $f: X \to Y$ appl. continua fra spazi topologici.

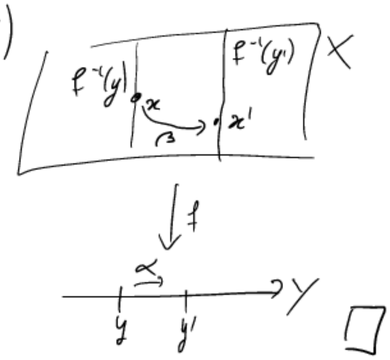
1) Se X è connesso allora $f(X)$ è connesso.

2) Se X è connesso per archi allora $f(X)$ è connesso per archi.

Dim.: 1) Supp. per assurdo $f(X)$ sconnesso, scriviamolo come unione disgiunta di due aperti non vuoti $f(X) = A \cup B$.

Allora $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, e questi sono due aperti disgiunti non vuoti. Segue X sconnesso: assurdo.

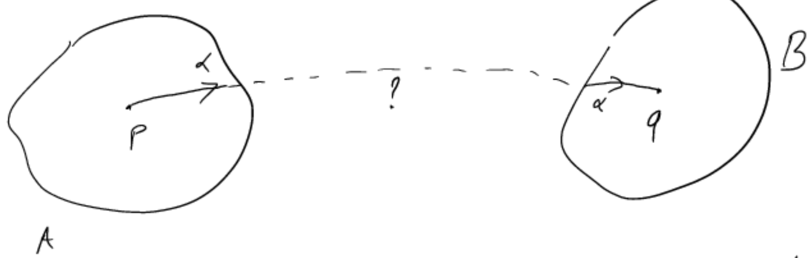
2) Siano $y, y' \in f(X)$, scegliamo $x \in f^{-1}(y)$, $x' \in f^{-1}(y')$ e $\beta : [0,1] \longrightarrow X$ cammino da x a x'; poi poniamo $\alpha = f \circ \beta : [0,1] \longrightarrow Y$. E' continua e va da y a y'.



$\square$

<u>Corollario</u>: Se X sp. top. è connesso per archi allora è connesso.

<u>Dim.</u>: Per assurdo supponiamo X sconnesso, scriviamolo come unione $X = A \cup B$ di aperti disgiunti non vuoti; scegliamo $p \in A$, $q \in B$, e $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ cammino da p a q



L'immagine $\alpha([0,1]) = Y$ è un sottosp. connesso di X, per il teorema e perché $[0,1]$ è connesso. Per un lemma precedente, abbiamo

$Y \subseteq A$: assurdo perché $q \in Y$, oppure

$Y \subseteq B$: —— , —— $p \in Y$.

Quindi X è connesso. $\square$

<u>Proposizione</u>: Sia $\mathbb{R}$ con top. euclidea e $I \subseteq \mathbb{R}$ con top. di sottospazio. Sono equivalenti:

1) I è un intervallo*,
2) I è connesso per archi,
3) I è connesso.

(*: ricordiamo la def. di <u>intervallo</u>: I è tale se $\forall a < b \in I$: se $a < c < b$ allora $c \in I$.)

Dim.: $1) \Rightarrow 2)$ | Se I è un intervallo allora è convesso, quindi è connesso per archi.

$2) \Rightarrow 3)$ | Segue dal corollario precedente.

$3) \Rightarrow 1)$ | Supp. I connesso, e per assurdo I non un intervallo.

Allora $\exists a, b, c \in \mathbb{R} \mid a, b \in I,\ c \notin I,\ a < c < b$, da cui

$$I = \underbrace{\left( ]-\infty, c[\cap I \right)}_{a \in} \cup \underbrace{\left( ]c, +\infty[\cap I \right)}_{b \in}$$

cioè I è unione di aperti disgiunti non vuoti: assurdo. $\square$

Oss.: La connessione e la connessione per archi si possono usare per dim. che due sp. top. non sono omeomorfi: se uno è connesso e l'altro no allora non possono essere omeomorfi! Analogamente si usa la connessione per archi.

Esempio: L'osservazione si può usare anche in modo più elaborato, ad esempio si può usare la connessione per dim. che $[0,1[$ e $]0,1[$ non sono omeomorfi, anche se sono entrambi connessi! (V. fogli settimanali di esercizi.)

La connessione per spazi topologici ha molte applicazioni, vediamone una.

Lemma: Sia $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione continua, $n \geq 1$ (S^n e $\mathbb{R}$ con top. euclidea). Esiste $p_0 \in S^n$ tale che $f(p_0) = f(-p_0)$.

(„Ci sono sempre due punti antipodali sulla Terra dove c'è la stessa temperatura.")

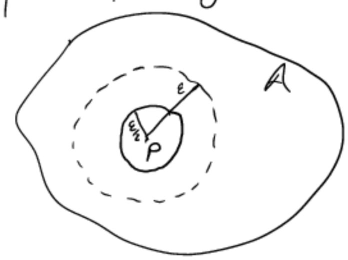
Dim.: Consid. $g: S^n \to \mathbb{R}$, $p \longmapsto f(p) - f(-p)$. E' una funzione continua,

e per qualsiasi $p \in S^n$ vale $g(-p) = -g(p)$. Quindi l'immagine di g contiene due numeri opposti, $g(p)$ e $-g(p)$. Ma S^n è connessa per archi, quindi $Im(g)$ è connessa per archi; cioè è un intervallo. Quindi deve contenere 0, cioè c'è $p_0 \in S^n$ t.c. $g(p_0) = 0$.

$\square$

Corollario (invarianza del dominio con $n=1$, m qualsiasi): Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ un aperto in topologia euclidea con $m > 1$ (ad es. $A = \mathbb{R}^m$). Allora A non è omeomorfo a $\mathbb{R}$.

Dim.: Poss. supporre $A \neq \emptyset$, sia $p \in A$, scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(p) \subseteq A$.



Allora $S = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - p\| = \frac{\varepsilon}{2}\}$ è tutto contenuto in A, ed è omeomorfo a S^{m-1} (basta traslare il centro nell'origine e riscalare per avere raggio $= 1$).

Supp. per assurdo esista un omeom. $f: A \to \mathbb{R}$, la restrizione $f|_S : S \to \mathbb{R}$ è continua e iniettiva: contraddice il lemma precedente, assurdo.

$\square$

Vediamo altri risultati generali che assicurano che certi spazi siano connessi.

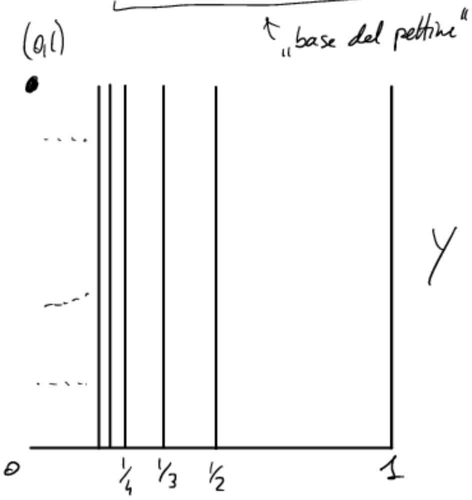
Proposizione: Sia X sp. top., $Y\subseteq X$ sottospazio connesso, denotiamo con $\overline{Y}$ la chiusura di Y in X. Sia $W\subseteq X$ con $Y\subseteq W\subseteq \overline{Y}$. Allora W è connesso. (In particolare, $\overline{Y}$ stesso è connesso.)

Dim.: Sia $Z\subseteq W$ un sottoinsieme non vuoto, aperto e chiuso in W. Allora $Z\cap Y$ è aperto e chiuso in Y (infatti se $A\subseteq X$ è aperto in X con $Z=A\cap W$, allora $Z\cap Y = A\cap \underbrace{W\cap Y}_{=Y} = A\cap Y$ quindi $Z\cap Y$ è ap. in Y; analogam. è anche chiuso in Y). Inoltre Y è denso in W, perché la sua chiusura in W è uguale a $\underbrace{\overline{Y}}_{\text{chiusura in } X}\cap W$ (lemma visto nella sezione sottospazi), e $\overline{Y}\cap W = W$. Allora Y interseca tutti gli ap. non vuoti di W, e quindi $Z\cap Y\neq\emptyset$. Ma Y è connesso e $Z\cap Y$ è aperto e chiuso: segue $Z\cap Y=Y$, cioè $Z\supseteq Y$. Infine Z è chiuso in W e contiene Y che è denso in W: segue $Z=W$. □

Esempio: La prop. ci permette di costruire un esempio di spazio top. connesso ma non connesso per archi: il pettine con la pulce.

Sia Y il seguente sottoins. di $\mathbb{R}^2$:

$$Y=\underbrace{\big([0,1]\times\{0\}\big)}_{\text{„base del pettine"}} \cup \underbrace{\left\{\left(1/n,\, t\right) \;\middle|\; n\in\mathbb{Z}_{>0},\ t\in[0,1]\right\}}_{\text{„denti del pettine"}}$$



e poniamo

$$X = Y\cup \underbrace{\{(0,1)\}}_{\text{la „pulce"}}$$

Osserviamo che $(0,1)$ è aderente a Y in $\mathbb{R}^2$, ad es. è limite della successione $\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ fatta di punti di Y. Inoltre Y è chiaramente connesso per archi, è facile connettere due punti qualsiasi (sulla base, o sui "denti" del pettine) con un cammino qualsiasi. Quindi Y è connesso, e la proposizione implica che X è connesso perché $Y \subseteq X \subseteq \overline{Y}$ ← chiusura in $\mathbb{R}^2$

Però X <u>non è</u> connesso per archi: non c'è alcun cammino (continuo) da $(0,1)$ a un qualsiasi punto di Y (v. fogli di esercizi).

Sappiamo che l'immagine di un connesso è connessa, ma la controimmagine di un connesso non è necessariam. connessa (es. $\{\text{due punti in } \mathbb{R}^n\} \to \{1 \text{ punto}\}$).

Però è connessa se aggiungiamo ipotesi:

<u>Proposizione:</u> Sia $f: X \to Y$ appl. continua fra spazi topologici, supp. che sia suriettiva. Se valgono:

1) Y è connesso,
2) $f^{-1}(y)$ è connesso $\forall y \in Y$,
3) f aperta, oppure chiusa,

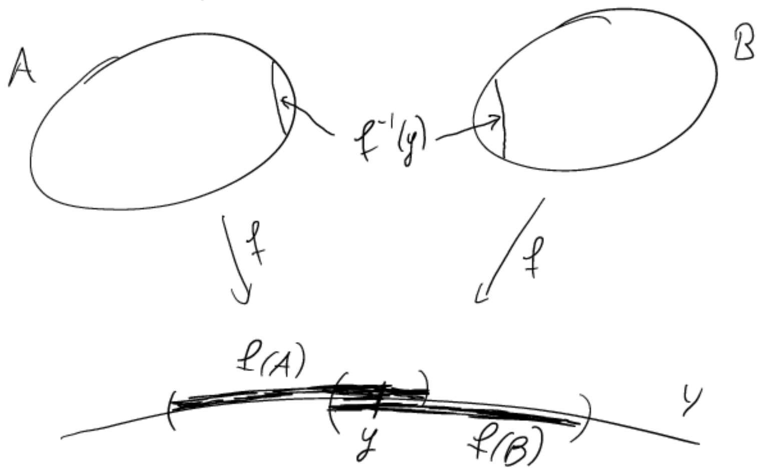
allora X è connesso.

<u>Oss.:</u> L'ipotesi 3) è necessaria, ad es.
$$f: [0,1] \cup]2,3] \longrightarrow [0,2]$$
$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ x-1 & \text{se } x \in]2,3] \end{cases}$$

è continua e suriettiva, soddisfa 1) e 2), ma il dominio è sconnesso.

<u>Dim.:</u> Supp. f aperta, e per assurdo X sconnesso. Scriviamo

$X = A \cup B$ con A, B aperti disgiunti non vuoti. Le immagini $f(A)$, $f(B)$ sono aperte, non vuote, e vale $Y = f(X) = f(A) \cup f(B)$. Visto che Y è connesso, dev'esserci un $y \in f(A) \cap f(B)$.



Cioè $f^{-1}(y)$ interseca A e anche B. Ma $f^{-1}(y)$ è connesso, e A è ap. e chiuso in X, per cui $f^{-1}(y)$ dev'essere tutto in A opp. tutto in $B = X \setminus A$: assurdo. Quindi X è connesso.

Il ragionam. con f chiusa è analogo, osservando che A e B sono anche chiusi. $\square$

<u>Teorema</u>: Il prodotto di sp. topologici connessi è connesso. Il prodotto di due sp. top. connessi per archi è connesso per archi.

<u>Dim.</u>: Connessione: siano P, Q connessi, e consid. la proiez. $p: P \times Q \to P$. E' continua, aperta, suriettiva, e la controimmagine di un qualsiasi $x \in P$ è uguale a $\{x\} \times Q$, che è omeomorfo a Q e quindi connesso.

Per la proposizione, $P \times Q$ è connesso.

Connessione per archi: <u>esercizio</u>. $\square$

<u>Def</u>: Sia X sp. topologico. Se $C \subseteq X$ è un sottospazio connesso e massimale rispetto a questa proprietà, allora C si dice <u>componente connessa</u> di C. Analogam. si definiscono le componenti connesse per archi.

<u>Oss.</u>: 1) Le componenti connesse sono chiuse, perché „la chiusura di un connesso è connessa" (chiusura intesa nello sp. ambiente). Però <u>non è vero</u> che siano anche sempre aperte!

2) E' facile dimostrare che le comp. connesse sono tutte disgiunte, perché l'unione di due connessi che si intersecano è connessa (v. fogli settiman. di eserc.). Analogamente per le comp. connesse per archi. Segue facilmente che uno spazio top. qualsiasi è unione disgiunta delle sue comp. connesse, ed è unione disgiunta delle sue comp. connesse per archi.

<u>Esempio</u>: In top. euclidea, qualsiasi sottoins. di $\mathbb{Q}$ con almeno 2 punti è sconnesso (v. fogli di eserc. settimanali). Quindi le componenti connesse di $\mathbb{Q}$ sono solo <u>singoli punti</u>. Osserviamo che sono chiuse, ma in questo caso <u>non aperte</u>.

Spazi topologici compatti

Def.: Sia X uno spazio topologico, e sia $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

1) $\mathcal{R}$ si dice <u>ricoprimento</u> di X se $\bigcup_{A \in \mathcal{R}} A = X$, si dice <u>ricoprimento aperto</u> se vale anche che A è aperto $\forall A \in \mathcal{R}$.

2) Se $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{P}(X)$ è un ricoprimento e $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$, allora $\mathcal{R}'$ si dice <u>sottoricoprimento</u> di $\mathcal{R}$.

Def.: Uno sp. topologico X si dice <u>compatto</u> se ogni ricoprimento aperto di X ha un sottoricoprimento finito.

Esempi: 1) $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea;

$$\mathcal{R} = \{]-\infty, 1[, \ ]-1, +\infty[, \ ]-1,1[, \ ]-2,2[, \dots,]-n,n[, \dots \}$$

è un ricoprim. infinito di X, che ammette il sottoricoprimento $\mathcal{R}' = \{]-\infty, 1[, \ ]-1, +\infty[\}$. Ma $\tilde{\mathcal{R}} = \{]-n, n[\mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \}$ è un ricoprim. aperto che non ha sottoricoprimenti finiti. Dunque X non è compatto.

2) Se X è finito, con qualsiasi topologia, allora è compatto perché ogni ricoprim. è finito. Se X ha cardinalità qualsiasi ma topologia banale allora è compatto.

3) Se X è infinito con top discreta, allora non è compatto, perché $\mathcal{R} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ è un ricoprimento aperto che non ammette sottoricoprim. finiti.

<u>Teorema:</u> $[0,1]$ (con top. euclidea) è compatto.

<u>Dim.:</u> Sia $\mathcal{R}$ ricoprim. aperto, per ogni $A \in \mathcal{R}$ scegliamo $A' \subseteq \mathbb{R}$ aperto in $\mathbb{R}$ tale che $[0,1] \cap A' = A$, e poniamo

$$\mathcal{S} = \{A' \mid A \in \mathcal{R}\}$$

E' una famiglia di aperti di $\mathbb{R}$, e la sua unione contiene $[0,1]$.

Poniamo $Y = \{t \in [0,1] \mid$ esiste una sottofamiglia finita di $\mathcal{S}$ la cui unione contiene $[0,t]\}$, e sia $b = \sup Y$.

<u>Dim. che $b \in Y$:</u> scegliamo $A'_0 \in \mathcal{S}$ t.c. $b \in A'_0$, e $\varepsilon > 0$ t.c. $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\subseteq A'_0$. C'è un $t \in Y \cap]b-\varepsilon, b]$,

scegliamo $A'_1, \ldots, A'_n$ tali che $A'_1 \cup \ldots \cup A'_n \supseteq [0,t]$, allora $A'_0 \cup A'_1 \cup \ldots \cup A'_n \supseteq [0,b]$, quindi $b \in Y$.

Dim. che $b=1$: per assurdo sia $b<1$, scegliamo A_0', ε,

$A_1', \dots, A_n'$ ma con la richiesta aggiuntiva che $b+\frac{\varepsilon}{2} \leq 1$.

Come prima vale

$A_0' \cup .. \cup A_n' \supseteq [0,b]$, ma vale anche

$A_0' \cup \dots \cup A_n' \supseteq [0, b+\frac{\varepsilon}{2}]$, per cui $b+\frac{\varepsilon}{2} \in Y$ e

b non può essere il sup di Y: assurdo.

Quindi esiste una sottofam. finita di $\mathcal{S}$ che ricopre $[0,1]$, e allora $\mathcal{R}$ ammette un sottoric. finito.

$\square$

Oss.: 1) Come la connessione, anche la compattezza si può usare per dim. che due spazi topologici non sono omeomorfi. Ad es. ora sappiamo che $\mathbb{R}$ e $[0,1]$ (con top. euclidea) non sono omeomorfi, perché $[0,1]$ è compatto e $\mathbb{R}$ no.

2) C'è una correlazione fra essere un sottosp. compatto di uno sp. topologico „ambiente", ed essere un sottospazio chiuso nello sp. ambiente:

Proposizione: Sia $Y \subseteq X$ sottosp. di uno spazio topologico.

1) Se X è compatto e Y è chiuso in X, allora Y è compatto.

2) Se X è T2 e Y è compatto, allora Y è chiuso in X.

Oss.: Attenzione: le ipotesi aggiuntive „X compatto" e „X T2" sono necessarie, infatti ad es.

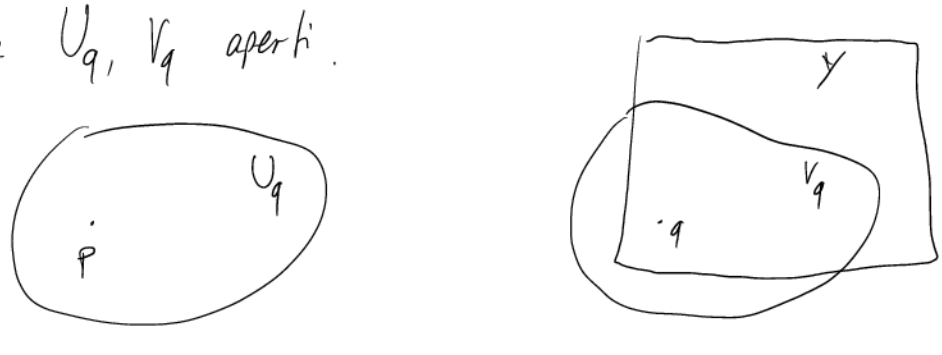
- $[0,+\infty[$ è chiuso in $\mathbb{R}$ ma non è compatto
- sia $X = \{a, b\}$ con $a \neq b$ e topologia banale, allora $Y = \{a\}$ è compatto (perché è finito, ad es.) ma non è chiuso.

<u>Dim. della prop.</u>: 1) Sia $\mathcal{R}$ ricoprim. aperto di Y, per ogni $A \in \mathcal{R}$ scegliamo $A' \subseteq X$ ap. in X t.c. $A' \cap Y = A$. La famiglia $\mathcal{S} = \{A' \mid A \in \mathcal{R}\}$ è una fam. di aperti (di X), la cui unione contiene Y. La famiglia $\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cup \{X \setminus Y\}$ è un ricoprim. di X, possiamo estrarne un sottoricoprim. finito. Cioè esistono $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$ tali che

$$A'_1 \cup \dots \cup A'_n \cup \underbrace{X \setminus Y}_{\text{eventualm. superfluo, ma non importa}} = X .$$

Allora $\{A_1, \dots, A_n\}$ è un sottoricoprim. finito di $\mathcal{R}$, per cui Y è compatto.

2) Dim. che $X \setminus Y$ è aperto; sia $p \in X \setminus Y$, per ogni $q \in Y$ scegliamo $U_q \in I(p)$, $V_q \in I(q)$ tali che $U_q \cap V_q = \emptyset$, possiamo suppore U_q, V_q aperti.



Allora $\{V_q \cap Y \mid q \in Y\}$ è un ricoprim. aperto di Y, estraiamo un sottoricoprim. finito, cioè scegliamo $q_1, \dots, q_m \in Y$ t.c.

$$Y = (V_{q_1} \cap Y) \cup \dots \cup (V_{q_m} \cap Y)$$

Allora $Y \subseteq V_{q_1} \cup \dots \cup V_{q_m}$, e allora $U = U_{q_1} \cap \dots \cap U_{q_m}$ non interseca Y (perché $U_{q_i} \cap V_{q_i} = \emptyset \ \forall i$). Ma U è aperto, quindi è un intorno di p tutto cont. in $X \setminus Y$, che allora è aperto perché è intorno di ogni suo punto.

$\square$

<u>Corollario:</u> Sia $X = \mathbb{R}$ con top. euclidea, sia $Y \subseteq X$ sottospazio.

Y è compatto $\Longleftrightarrow$ Y è chiuso (in X) e limitato.

<u>Dim.:</u> $\Rightarrow$) X è T2, quindi se Y è compatto è chiuso in X.

Inoltre se per assurdo Y compatto non è limitato, allora non si può estrarre alcun sottoric. finito dal ricoprimento

$$\mathcal{R} = \{\,]-n, n[\cap Y \mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \}$$

di Y: assurdo. Quindi Y è anche limitato.

$\Leftarrow$) Sia $Y \subseteq X$ chiuso e limitato. Allora esiste $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tale che $Y \subseteq [-n, n]$, e questo intervallo è compatto perché è omeomorfo a $[0,1]$. Inoltre Y è chiuso in X e segue facilmente che Y è chiuso anche in $[-n, n]$. Essendo chiuso in un compatto, Y è compatto.

$\square$

Studiamo ora come si comporta la compattezza con le applicazioni continue.

<u>Teorema</u>: Sia $f: X \to Y$ appl. continua fra sp. topologici. Se X è compatto anche $f(X)$ è compatto.

<u>Dim.</u>: Sia $\mathcal{R}$ ricoprim. aperto di $f(X)$, poniamo
$\tilde{\mathcal{R}} = \{ f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{R} \}$. Sappiamo che anche $\tilde{f}: X \to f(X)$, $x \mapsto f(x)$ è continua, perciò $\tilde{\mathcal{R}}$ è un ric. aperto di X. Estraiamo un sottoric. finito $\tilde{\mathcal{R}}' = \{ f^{-1}(A_1), \dots, f^{-1}(A_n) \}$ di $\tilde{\mathcal{R}}$, e consid.
$\mathcal{R}' = \{ A_1, \dots, A_n \}$: è un sottoricoprim. finito di $\mathcal{R}$, per cui $f(X)$ è compatto.

$\square$

<u>Corollario</u>: Siano X sp. top., $\mathbb{R}$ con top. euclidea, $f: X \to \mathbb{R}$ continua. Allora f ha minimo e massimo.

<u>Dim.</u>: $f(X)$ è compatto, quindi è limitato ($\Rightarrow$ inf e sup sono finiti) e chiuso ($\Rightarrow$ inf e sup sono min e max rispettivam.).

$\square$

Corollario: Sia $f: X \longrightarrow Y$ appl. continua fra spazi topologici. Se X è compatto e Y è di Hausdorff allora f è chiusa.

Dim.: Sia $C \subseteq X$ chiuso, allora è compatto, e $f(C)$ è compatto ed è dentro Y che è T2, quindi $f(C)$ è chiuso in Y.

$\square$

Questo ci permette di dimostrare un fatto utilissimo per verificare facilmente in tanti esempi che certe applicazioni sono omeomorfismi.

Corollario: Sia $f: X \longrightarrow Y$ applicaz. continua fra spazi topologici, supp. f biiettiva, X compatto, Y di Hausdorff. Allora f è un omeomorfismo.

Dim.: f è chiusa per il lemma, quindi è un omeom. (v. fogli di esercizi settimanali).

$\square$

Oss.: Come per la connessione, la controimmagine di un compatto non è sempre compatta, ad es. $\mathbb{R} \longrightarrow \{pto\}$. Però lo è sotto alcune ipotesi aggiuntive:

Proposizione: Sia $f: X \longrightarrow Y$ appl. continua fra sp. top., supp. sia suriettiva. Se valgono:

1) Y compatto,

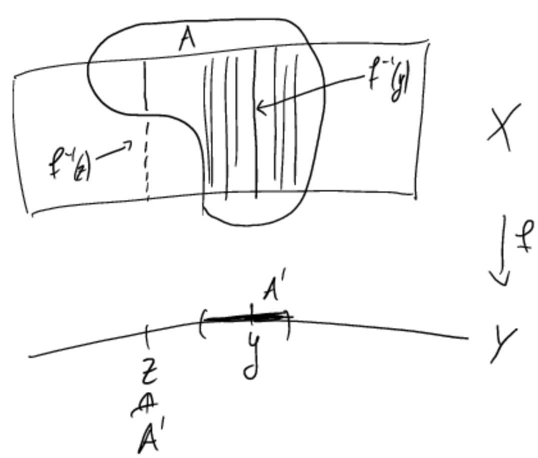
2) $f^{-1}(y)$ compatto $\forall y \in Y$,

3) f chiusa,

allora X è compatto.

Oss.: Qui non andrebbe bene supporre f aperta invece che chiusa (v. fogli settimanali di esercizi).

Dim.: Introduciamo per comodità la seguente notazione: dato $A \subseteq X$ aperto, denotiamo $A' = \{ y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq A \}$.



L'insieme A' è aperto in Y, perché:

$$Y \setminus A = \{ z \in Y \mid f^{-1}(z) \not\subseteq A \} = \{ z \in Y \mid f^{-1}(z) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \}$$

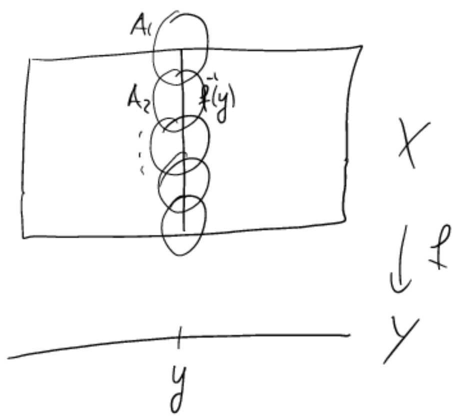
$= \{ z \in Y \mid \exists x \in X \setminus A \mid f(x) = z \} = f(X \setminus A)$

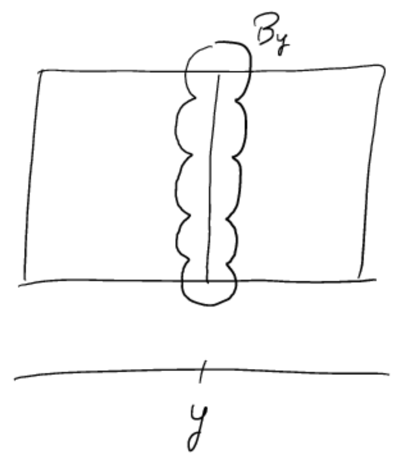
è chiuso in Y, visto che A è aperto in X e f è chiusa.

Sia ora $\mathcal{R}$ ricoprimento aperto di X, definiamo $\mathcal{R}_0 =$
$= \{$unioni finite di elem. di $\mathcal{R}\}$.

Ogni elem. di $\mathcal{R}_0$ è un aperto di X, e $\mathcal{R}_0 \supseteq \mathcal{R}$, quindi $\mathcal{R}_0$ è un ricoprimento di X.

Sia $y \in Y$, consid. $f^{-1}(y)$: è compatto, quindi esistono $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$ tali che $f^{-1}(y) \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$:





Unendoli ottengo $B_y = A_1 \cup \dots \cup A_n$, un elem. di $\mathcal{R}_0$ tale che $B_y' \ni y$ (infatti $f^{-1}(y) \subseteq B_y$).

Segue che la famiglia $\{ B_y' \mid y \in Y \}$ è un ricoprim. aperto di Y: estraiamone un sottoricoprim. finito, cioè scegliamo $y_1, \dots, y_m \in Y$ t.c. $B_{y_1}' \cup \dots \cup B_{y_m}' = Y$.

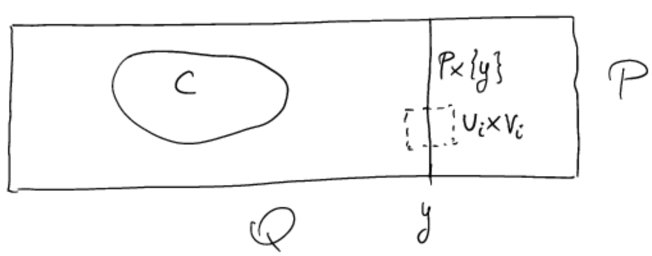
Ma allora $B_{y_1} \cup \dots \cup B_{y_m} = X$, e ciascun B_{y_i} è unione finita di elem. di $\mathcal{R}$. Mettendoli insieme per ogni i abb. trovato un sottoricoprimento finito di $\mathcal{R}$, quindi X è compatto.

$\square$

<u>Proposizione:</u> Siano P, Q spazi topologici. Se P è compatto, la proiezione $q: P \times Q \longrightarrow Q$ è chiusa.

<u>Oss.:</u> Nella proposizione vale in realtà „se e solo se", cioè se P è uno sp. top. t.c. la proiez. $q: P \times Q \to Q$ è chiusa $\forall Q$ sp. top., allora P è compatto (v. fogli di esercizi).

<u>Dim.</u> (del corollario): Sia $C \subseteq P \times Q$ chiuso, dimostriamo che $Q \setminus p(C)$ è intorno di ciascun suo punto. Sia $y \in Q \setminus q(C)$,



osserviamo che $P \times \{y\}$ è compatto perché è omeomorfo a P.
Scriviamo l'aperto $(P \times Q) \setminus C$ come unione, usando la solita base:

$$(P \times Q) \setminus C = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i \quad \text{con } U_i \subseteq P,\ V_i \subseteq Q \text{ aperti.}$$

Ne esiste un numero finito che ricopre tutto $P \times \{y\}$, siano allora $i_1, \dots, i_m$ tali che

$(U_{i_1} \times V_{i_1}) \cup \dots \cup (U_{i_m} \times V_{i_m}) \supseteq P \times \{y\}$. Osserviamo che

$(P \times Q \setminus C) \supseteq U \times V \supseteq P \times \{y\}$ ponendo $U = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m}$, $V = V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_m}$,

e segue $y \in V \subseteq Q \setminus p(C)$, quindi $p(C)$ è chiuso. $\square$

Oss.: La dim. è simile a quella che un compatto in un T2 è chiuso. In effetti esiste una dimostrazione simile ma un po' più generale, che implica entrambe (v. teo. di Wallace sul libro di Manetti).

Corollario: Se P e Q sono compatti allora $P \times Q$ è compatto.

Dim.: Usiamo la proiezione $q: P \times Q \longrightarrow Q$: è chiusa, il codominio è compatto, e le controimmagini dei punti di Q sono compatte perché omeomorfe a P. Segue: il dominio $P \times Q$ è compatto. $\square$

Esempio: $[0,1]^n$ con $n \geq 1$ è compatto, grazie all'ultimo corollario.

Identificazioni

Def.: Un'applicazione $f: X \longrightarrow Y$ fra spazi topologici si dice identificazione se:

1) f è continua e suriettiva

2) un sottoinsieme $A \subseteq Y$ è aperto in Y se e solo se

$f^{-1}(A)$ è aperto in X.

<u>Oss.</u>: Se f è un'identificazione, allora la topologia su Y è univocam. determinata da f e dalla topologia su X.

<u>Lemma</u>: Sia $f: X \to Y$ applicaz. continua fra spazi topologici.

1) Se f è suriettiva e aperta, allora è un'identificazione.

2) Se f è suriettiva e chiusa, allora è un'identificazione.

<u>Dim.</u>: 1) Supp. f suriettiva e aperta. Sia $A \subseteq Y$: se A è aperto, allora $f^{-1}(A)$ è aperto. Viceversa, supponiamo che $f^{-1}(A)$ sia aperto e dim. che A è aperto.

Vale $A = f(f^{-1}(A))$ perché f è suriettiva (ricordiamo che in generale vale $f(f^{-1}(A)) = A \cap f(X)$). Quindi A è aperto perché f è aperta.

2) Esercizio.

$\square$

<u>Esempi</u>: 1) Se f è un omeomorfismo allora è un'identificazione.

2) Le proiezioni $p: P \times Q \to P$ e $q: P \times Q \to Q$ sono identificazioni.

3) $f : [0,1] \longrightarrow S^1$ è chiusa, suriettiva e continua,
$\quad t \longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$

quindi è un'identificazione. Dimostriamo che è chiusa: è un'applicaz. continua da un compatto in un T2, quindi è chiusa.
Osserviamo che non è aperta: l'immagine di $[0, \frac{1}{2}[$, che è aperto in $[0,1]$, non è aperta in S^1.

<u>Lemma</u> (proprietà universale delle identificazioni): Sia $f : X \to Y$ identificazione fra sp. topologici, sia Z uno sp. top. e $g : X \to Z$ continua. Supp. g sia costante sulle <u>fibre</u> (= controimmagini) di f, cioè $\forall x, x' \in X$: se $f(x) = f(x')$ allora $g(x) = g(x')$. Allora esiste un'unica appl. continua $h : Y \to Z$ tale che $g = h \circ f$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \\ Y \arrow[ur, dashed, "\exists ! h"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Dim.</u>: Definiamo $h : Y \to Z$: dato $y \in Y$ scegliamo $x \in f^{-1}(y)$ e poniamo $h(y) = g(x)$. Questo è ben definito grazie alle ipotesi su g, inoltre è l'unica definizione possibile per cui valga $g = h \circ f$. Questo assicura l'unicità di h.
Rimane da dim. che h è continua, sia $A \subseteq Z$ aperto.
Sappiamo che $g^{-1}(A)$ è aperto, inoltre vale

$$g^{-1}(A) = f^{-1}(h^{-1}(A))$$

Visto che f è un'identificazione, deduciamo che $h^{-1}(A)$ è aperto, per cui h è continua.

<u>Osservazione:</u> Data $f: X \to Y$ identificazione, sia $A \subseteq X$ aperto <u>saturo</u> cioè $\forall a \in A \ \forall b \in X$: se $f(a) = f(b)$ allora $b \in A$. In questo caso $A = f^{-1}(f(A))$, per cui $f(A)$ è aperto. Cioè tramite un'identificazione le immagini degli aperti <u>saturi</u> sono aperte.

Topologia quoziente

<u>Definizione:</u> Siano X uno sp. topologico, Y un insieme, $f: X \to Y$ un'applicazione suriettiva. La famiglia

$$\{ A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \text{ è aperto in } X \}$$

è una topologia su Y, detta <u>topologia quoziente</u> (indotta da f).

<u>Esercizio:</u> Verificare che la famiglia definita prima è effettivamente una topologia su Y.

<u>Oss.:</u> 1) Con la topologia quoziente su Y, f è continua e anche un'identificazione. Inoltre:

a) la topologia quoziente è l'unica possibile su Y che rende f un'identific.,

b) la top. quoziente è la più fine che rende f continua.

2) Viceversa, se Y ha già una topologia ed f è un'identificazione, allora la topologia su Y coincide con la topologia quoziente.

<u>Esempi:</u> 1) Sia X sp. topologico, e $\sim$ una rel. d'equivalenza su X.

Allora è definito il quoziente $X/_\sim$ come l'insieme delle classi di equivalenza (denotate come $[x]$ = classe d'eq. che contiene $x \in X$) e l'applicazione suriettiva

$$\begin{aligned} \pi: X &\longrightarrow X/_\sim \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

In questo caso si mette su $X/_\sim$ di solito la topologia quoziente indotta da π.

2) Consideriamo $X = [0,1]$ con rel. d'equivalenza $\sim$ definita come

$$x \sim y \iff \begin{cases} x = y & \text{oppure} \\ x, y \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Cioè le classi di equivalenza sono $[0] = [1] = \{0, 1\}$, e $[z] = \{z\}$ $\forall z \in \,]0,1[$.

Il quoziente $X/_\sim$ „appiccica" i punti 0 e 1, lasciando gli altri invariati. Verifichiamo che $X/_\sim$ è omeomorfo a S^1. Usiamo l'appl. già vista, chiamiamola stavolta g:

$$\begin{aligned} [0,1] &\xrightarrow{\ g\ } S^1 \\ t &\longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

Confrontiamola con la proiezione

$$\begin{aligned} \pi: [0,1] &\longrightarrow \frac{[0,1]}{\sim} \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

Vale: π è un'identificazione, e g è costante sulle fibre di π, perché $g(0)=g(1)$. Allora g „passa al quoziente", cioè esiste $h\colon \frac{[0,1]}{\sim} \longrightarrow S^1$ continua t.c. $g = h\circ\pi$:

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & S^1 \\ \frac{[0,1]}{\sim} \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Oss.: $h([x]) = $
$= \left(\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)\right)$.

Ora h è iniettiva, perché ad ogni punto $[z]$ di $\frac{[0,1]}{\sim} \setminus \{[0]\}$ corrisponde un <u>solo</u> $z \in]0,1[$, che individua un punto di S^1 e su questi z l'appl. g è iniettiva. Poi il punto $[0]$ va in $(1,0)\in S^1$, che è diverso da $g(z)$ $\forall z\in]0,1[$.

Inoltre h è suriettiva, perché g è suriettiva.

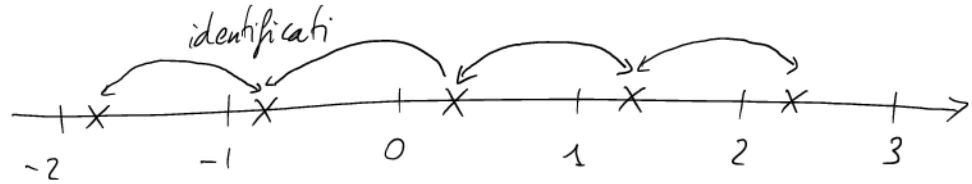
Infine: $[0,1]$ è compatto, allora la sua immagine $\frac{[0,1]}{\sim}$ è compatto, e S^1 è T2: segue che h è un omeomorfismo.

3) Una costruzione analoga alla precedente è questa:

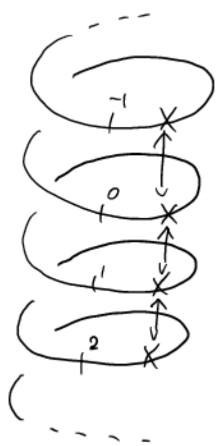
sia $X = \mathbb{R}$, e $\sim$ rel. d'eq. data da $x\sim y \iff x-y\in\mathbb{Z}$. Cioè stiamo identificando tutti i punti di $\mathbb{R}$ che si trovano a distanza intera l'uno dall'altro:

$$\ldots \sim -2 \sim -1 \sim 0 \sim 1 \sim 2 \sim \ldots$$

$$\ldots \sim -2{,}7 \sim -1{,}7 \sim -0{,}7 \sim 0{,}3 \sim 1{,}3 \sim \ldots$$



Possiamo visualizzarlo meglio immaginando $\mathbb{R}$ avvolto a spirale:



Otteniamo intuitivamente

$$\mathbb{R}/\sim \; = \; S^1$$

Effettivamente anche $\mathbb{R}/\sim$ è omeomorfo a S^1, e si dimostra come prima usando stavolta

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$
$$t \longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

Anche qui g passa al quoziente:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & S^1 \\ \mathbb{R}/\sim \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

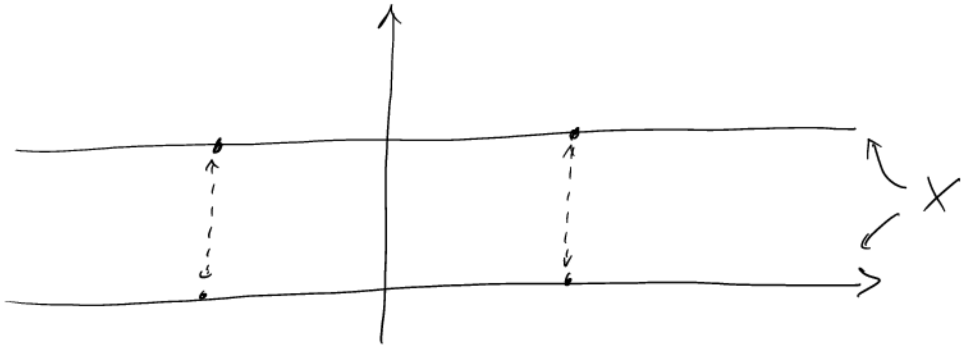
e h è continua, biiettiva, S^1 è $T2$. Di nuovo $\mathbb{R}/\sim$ è compatto, ma stavolta si dimostra osservando che

$$\mathbb{R}/\sim \; = \pi([0,1]) .$$

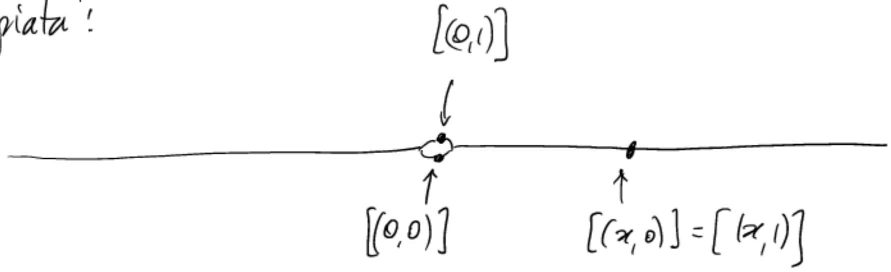
4) In $\mathbb{R}^2$ prendiamo $X = \mathbb{R} \times \{0,1\}$ (= l'unione di due rette orizzontali). Poniamo per $(x,y), (x',y') \in X$:

$$(x,y) \sim (x',y') \iff \begin{cases} (x,y) = (x',y') & \text{oppure} \\ x = x' \neq 0 & (\text{con qualsiasi } y, y') \end{cases}$$

Quindi abbiamo $(x,0) \sim (x,1)$ $\forall x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, ma $(0,0) \not\sim (0,1)$:



Allora $X/_\sim$ è una sola copia di $\mathbb{R}$, ma con l'origine „raddoppiata":



Qui $X/_\sim$ <u>non</u> è T2, perché $[(0,1)]$ e $[(0,0)]$ non ammettono intorni disgiunti (esercizio).

5) Un modo usuale di costruire quozienti è il seguente. Dato X sp. top., si considera un sottoinsieme $Y \subseteq X$ (qualsiasi), e si definisca la rel. d'equivalenza $\sim_Y$ come:

$$x \sim_Y x' \iff \begin{cases} x = x' & \text{opp.} \\ x, x' \in Y \end{cases}$$

Le classi d'equival. sono: una sola per tutti gli elem. di Y, cioè $Y = [y]$ $\forall y \in Y$, e poi tante altre classi $[z] = \{z\}$ una per ogni $z \in X \setminus Y$. Lo spazio topologico $X/_{\sim_Y}$ è ottenuto intuitivamente „contraendo Y a un singolo punto", si denota anche con X/Y.

Un modo anche usuale di costruire quozienti è usando azioni di gruppi:

Def.: Sia X sp. topologico, definiamo $Omeo(X) = \{ f : X \to X \text{ omeomorfismo} \}$.

Osserviamo che $Omeo(X)$ è un gruppo, con operazione $\circ$ = la composizione, ed elemento neutro l'identità $id_X : X \to X$. Sia ora $G \subseteq Omeo(X)$ un sottogruppo; allora è definita la relaz. d'equivalenza

$$x \sim y \iff \exists g \in G \mid g(x) = y \qquad \left(\begin{array}{l}\text{le classi di equivalenza} \\ \text{sono le orbite di } G \text{ su } X\end{array}\right)$$

$(x, y \in X)$

e si denota $X/_\sim$ anche come X/G.

Esempio: L'esempio con $X = \mathbb{R}$ e $x \sim x + n \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$ si può anche ottenere come X/G, basta prendere $\forall n \in \mathbb{Z}$ l'omeom.

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{e il gruppo} \quad G = \{ f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{Z} \}$$
$$x \longmapsto x + n$$

infatti $f_n \circ f_m = f_{n+m}$, $\quad f_n^{-1} = f_{-n}$.

Proposizione: Siano X uno sp. top. e G un sottogr. di $Omeo(X)$. L'applicazione naturale

$$\pi : X \longrightarrow X/G \quad \text{è aperta.}$$
$$x \longmapsto [x]$$

Inoltre se G è finito π è anche chiusa.

Dim.: Sia $A \subseteq X$ aperto, ricordiamo che $\pi(A)$ è aperto in X/G se e solo se $\pi^{-1}(\pi(A))$ è aperto in X. Abbiamo:

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \{x \in X \mid \pi(x) \in \pi(A)\} =$$

$$= \{x \in X \mid \exists a \in A \mid [x]=[a]\} = \{x \in X \mid \exists a \in A \; \exists g \in G \mid g(x) = a\} = \{x \in X \mid \exists g \in G \mid g(x) \in A\} =$$

$$= \bigcup_{h \in G} h(A)$$

infatti se $g(x) \in A$ allora $g^{-1}(g(x)) \in g^{-1}(A)$ cioè $x \in g^{-1}(A)$

Visto che A è aperto e gli elem. di G sono omeom. $X \to X$, l'insieme $h(A)$ è aperto $\forall h \in G$, quindi $\pi^{-1}(\pi(A))$ è aperto, e $\pi(A)$ è aperto.
Sia ora G finito e $C \subseteq X$ chiuso, abb. $\pi(C)$ chiuso se e solo se $\pi^{-1}(\pi(C))$ è chiuso, e vale:

$$\pi^{-1}(\pi(C)) = \underbrace{\bigcup_{h \in G}}_{\text{unione finita}} \underbrace{h(C)}_{\text{chiuso}} \quad \text{è chiuso.}$$

$\square$

Come nell'esempio di $\mathbb{R}$ con l'origine „raddoppiata", talvolta X è T2 ma $X/\sim$ no, ed è spesso utile determinare se $X/\sim$ lo è oppure no.
Con X/G c'è un teorema utile per questo.

Teorema: Siano X sp. top. e G sottogr. di $\mathrm{Omeo}(X)$. Supp. X di Hausdorff. Il quoziente X/G è di Hausdorff se e solo se $D = \{(x, g(x)) \in X \times X \mid x \in X, g \in G\}$ è chiuso in $X \times X$.

Dim.: Ricordiamo che l'applicaz. quoziente $\begin{aligned} X &\to X/G \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$ è suriettiva e aperta, e allora anche

$$\begin{aligned} \pi \times \pi : X \times X &\longrightarrow X/G \times X/G \\ (x, y) &\longmapsto ([x], [y]) \end{aligned}$$

è suriettiva e aperta (esercizio). Allora $\pi \times \pi$ è un'identificazione. Vale

$$D = (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta_{X/G})$$

dove $\Delta_{X/G}$ è la diagonale in $X/G \times X/G$. Infatti

$$(\pi \times \pi)(x, y) \in \Delta_{X/G} \iff [x] = [y] \iff \exists g \in G \mid y = g(x).$$

Quindi X/G è T2 $\iff \Delta_{X/G}$ chiusa in $X/G \times X/G \iff$ D è chiuso in $X \times X$.

$\square$

Oss.: Se $f: X \to Y$ e $g: Z \to W$ sono identificazioni, <u>non è</u> sempre

vero che $f \times g : X \times Z \to Y \times W$ è un'identificazione (v. fogli
$(x, z) \mapsto (f(x), g(z))$

di esercizi settimanali).

Gruppi topologici

Def.: Un gruppo topologico è un gruppo G che è anche uno spazio topologico, tale che l'operazione di gruppo

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto gh \end{aligned}$$

e l'inverso $\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$ sono applicazioni continue.

Esempi: 1) Ogni gruppo con topologia discreta oppure banale è un gruppo topologico

2) $\mathbb{R}^n$ con topologia euclidea e operaz. la somma è un gruppo topologico.

3) $GL(n, \mathbb{R})$ opp. $GL(n, \mathbb{C})$ con operazione la moltipl. di matrici, e topologia euclidea indotta dall'insieme di tutte le matrici $M_n(\mathbb{R})$ opp. $M_n(\mathbb{C})$ identificato con $\mathbb{R}^{n^2}$ opp. $\mathbb{C}^{n^2}$.

4) Anche i sottogruppi di $GL(n, \mathbb{R})$ e $GL(n, \mathbb{C})$, con topologia di sottospazio, sono gruppi topologici.

Oss.: Se G è un gruppo topologico e $g \in G$, allora la moltipl. a sinistra per g: $\begin{aligned} \lambda_g : G &\to G \\ x &\mapsto gx \end{aligned}$ è un omeomorfismo di G in se stesso. Infatti è la composizione delle seguenti applicazioni:

$$G \xrightarrow{\alpha} G \times G \xrightarrow{m} G \qquad \mu_g = m \circ \alpha$$

$$x \longmapsto (g, x)$$

$$(a, b) \longmapsto (ab)$$

dove α è continua perché le sue componenti sono l'applicaz. costante $x \mapsto g$ e l'identità $id_G : x \mapsto x$.

Per lo stesso motivo $\begin{aligned} \rho_g : G &\to G \\ x &\mapsto xg \end{aligned}$ è continua, e analogam. lo sono anche $x \mapsto g^{-1}x$, $x \mapsto xg^{-1}$, e il coniugio per g, cioè $\begin{aligned} G &\to G \\ x &\mapsto gxg^{-1} \end{aligned}$.

Esercizio (difficile): Sia G gruppo topologico di Hausdorff, $H \subseteq G$ un sottogruppo chiuso. Allora $G/H = \{$classi laterali sinistre di $H\}$ (ricordiamo: è uguale a $G/\sim$ dove $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1^{-1} g_2 \in H$) è di Hausdorff.

Proprietà di numerabilità

Def.: Sia X spazio topologico.

1) X si dice <u>1°-numerabile</u> se ogni $x \in X$ ha un sistema fondamentale di intorni numerabile.
2) X si dice <u>2°-numerabile</u> (o a <u>base numerabile</u>) se ha una base numerabile.
3) X si dice <u>separabile</u> se esiste un sottoinsieme denso in X e numerabile.

Es.: 1) Ogni spazio topologico finito o infinito numerabile soddisfa 1), 2) e 3).

2) Ogni spazio topologico discreto è 1°-numerabile, perché per ogni elem. x l'insieme $\{x\}$ è un sistema fondam. di intorni.
Però se uno spazio top. discreto è più che numerabile allora non è né 2°-num. né separabile.

3) $\mathbb{R}^n$ è 1°-numerabile (es. $\{B_{\frac{1}{n}}(p) \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$)
2°-numerabile (es. $\{B_{1/n}(p) \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}$ e $p \in \mathbb{Q}^n\}$)
separabile (es. $\mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n$).

Lemma: Se uno sp. top. X è 2° numerabile allora è anche 1°-numerabile

Dim.: Sia $\mathcal{B}$ base numerabile di X, e sia $p \in X$. Allora
$J = \{A \in \mathcal{B} \mid A \ni p\}$ è un sist. fondam. di intorni

di p, perché ogni intorno di p contiene un aperto contenente p, e allora anche un elem. di $\mathcal{J}$. $\square$

<u>Proposizione:</u> 1) Ogni spazio metrico è 1°-numerabile.

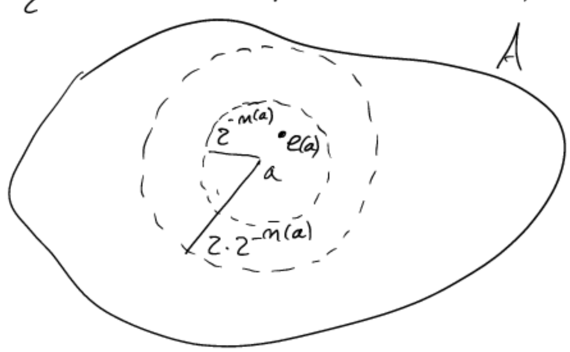
2) Ogni spazio metrico separabile è 2°-numerabile.

<u>Dim.:</u> 1) Basta prendere $\{ B_{\frac{1}{n}}(p) \mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \}$ come sist. fondam. di intorni di $p \in X =$ sp. metrico.

2) Sia E sottoins. denso numerabile di X sp. metrico, e consid.

$$\mathcal{B} = \{ B(e, 2^{-n}) \mid e \in E,\ n \in \mathbb{Z}_{>0} \}$$

E' numerabile, verifichiamo che è una base. Sia $A \subseteq X$ aperto, per ogni $a \in A$ scegliamo $n(a) > 0$ t.c. $B_{2 \cdot 2^{-n(a)}}(a) \subseteq A$, e scegliamo $e(a) \in E$ t.c. $e(a) \in B_{2^{-n(a)}}(a)$ (esiste perché E è denso e $B_{2^{-n(a)}}(a)$ è aperto non vuoto):



Allora vale $\quad a \in B_{2^{-n(a)}}(e(a)) \underset{\text{per la disug. triang.}}{\subseteq} B_{2 \cdot 2^{-n(a)}}(a) \subseteq A$.

Segue: $A = \bigcup_{a \in A} B_{2^{-n(a)}}(e(a))$ per cui $\mathcal{B}$ è una base. $\square$

Esempio: Attenzione: non è vero che uno spazio topologico separabile e 1°-numerabile è sempre 2°-numerabile.
Ad esempio $X=\mathbb{R}$ con topologia di Sorgenfrey è 1°-numerabile, infatti $\{[x, x+\frac{1}{n}[\mid n\in\mathbb{Z}_{>0}\}$ è un sist. fond. di intorni di $x\in\mathbb{R}$ qualsiasi, ed è separabile perché $\mathbb{Q}$ interseca ogni intervallo del tipo $[a,b[$ con $b>a$, quindi $\mathbb{Q}$ interseca ogni aperto non vuoto, per cui $\mathbb{Q}$ è denso.
Ma X non è 2°-numerabile, infatti sia $\mathcal{B}$ base di X, allora $[x,x+1[$ è unione di elem. di $\mathcal{B}$ $\forall x\in X$. Dunque esiste $A_x\in\mathcal{B}$ t.c. $x\in A_x\subseteq[x,x+1[$, in particolare $x=\min A$. Inoltre se $x\neq y$ allora $A_x\neq A_y$ perché i loro minimi sono diversi. Segue che $\mathcal{B}$ contiene il sottoinsieme $\{A_x \mid x\in\mathbb{R}\}$ che ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$, per cui $\mathcal{B}$ non è numerabile. Segue anche che X non è metrizzabile.

Successioni

Def: Sia X uno sp. top.. Una successione in X è un'applicazione
$$a: \mathbb{Z}_{>0} \longrightarrow X, \quad n \longmapsto a(n)=a_n.$$
Una successione a converge a $p\in X$ se $\forall U\in\mathcal{I}(p)\ \exists N\in\mathbb{Z}_{>0} \mid a(n)\in U\ \forall n\geq N$.

Oss.: Se X è di Hausdorff e una successione converge a $p \in X$ e anche a $q \in X$, allora $p = q$.

Proposizione: Siano X sp. top. 1°-numerabile, $A \subseteq X$, $p \in X$. Sono equival.:

1) Esiste una successione in A che converge a p.

2) $p \in \overline{A}$.

Dim.: 1) $\Rightarrow$ 2) ovvio perché se vale 1) allora p è aderente all'immagine di a.

2) $\Rightarrow$ 1) Sia $\{U_n \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ sist. fond. di intorni di p.

Per ogni n, anche $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ è intorno di p, scegliamo $a(n) \in A \cap U_1 \cap \ldots \cap U_n$. Questo produce una successione a che converge a p, perché dato U intorno di p scegliamo N t.c. $U_N \subseteq U$, e allora $a(n) \in A \cap U_1 \cap \ldots \cap U_N \cap \ldots \cap U_n \subseteq U$ $\forall n \geq N$.

$\square$

Def.: 1) Sia a una successione in uno sp. top. X, una <u>sottosuccessione</u> di a è una successione b in X tale che

$$b(n) = a(f(n)) \quad \forall n, \quad \text{dove } f: \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0} \text{ è}$$

un'applicazione strettamente crescente.

2) Uno sp. top. X si dice <u>compatto per successioni</u> se

ogni successione in X ammette una sottosuccessione convergente (a qualche punto di X).

<u>Esempi</u>: Oltre ai soliti esempi dei chiusi e limitati in $\mathbb{R}^n$, osserviamo:

- esistono sp. top. compatti ma non compatti per successioni (es.: prodotti infiniti)
- esistono sp. topologici compatti per successioni ma non compatti (es.: la „linea lunga")

(V. libro di Manetti per esempi di questo tipo.)

<u>Teorema</u>: Sia X spazio topologico.

1) Se X è compatto e 1°-numerabile, allora è compatto per successioni.

2) Se X è compatto per successioni e 2°-numerabile, allora è compatto.

<u>Dim.</u>: 1) Sia X compatto e 1°-num., sia a succ. in X.

<u>1° passo</u>: Troviamo un <u>„punto di accumulazione"</u> per a.

Consideriamo $C_m = \overline{\{a_n \mid n \geq m\}}$, chiuso in X $\forall m$, quindi compatto, e consid.

$C = \bigcap_{m \in \mathbb{Z}_{>0}} C_m$. Vale $C \neq \emptyset$, perché se per assurdo $C = \emptyset$ allora $\{C_1 \setminus C_m \mid m \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ sarebbe un

ricoprim. aperto di C_1, senza sottoricoprim. finiti perché un'unione

del tipo $(C_1 \setminus C_{m_1}) \cup \ldots \cup (C_1 \setminus C_{m_n})$ non contiene

i punti di $C_{\max\{m_1, \ldots, m_n\}} \neq \emptyset$: assurdo.

Allora esiste $p \in C$, e da questo segue:

$$\boxed{\forall U \in I(p)\ \forall m \in \mathbb{Z}_{>0}\ \exists n \geq m \mid a_n \in U.}$$

← questa è la def. di p punto di accumulazione di a

Sia ora $\{U_n \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ sistema fond. di intorni numerabile di p,

come prima poniamo $V_n = U_1 \cap \ldots \cap U_n$, allora

$\forall n\ \forall m\ \exists k = k(m,n) \geq m \mid a_k \in V_n$. Definiamo:

$k_1 = k(1,1)$, cioè $k_1 \geq 1$ e $a_{k_1} \in V_1$,

$k_2 = k(k_1+1, 2)$, cioè $k_2 > k_1$ e $a_{k_2} \in V_2$,

$\vdots$

$k_j = k(k_{j-1}+1, j)$, cioè $k_j > k_{j-1}$ e $a_{k_j} \in V_j$.

da questo segue $b(j) = a(k_j)$ è sottosucc.

da questo segue b converge a p

e poniamo $b(j) = a(k_j)$: questa sottosucc. converge a p.

2) Supp. X 2°-num. e compatto per succ., ma per assurdo non compatto.

Sia $\mathcal{R}$ ricoprim. aperto di X senza sottoricoprim. finiti, e sia $\mathcal{B}$ base numerabile. Per ogni $p \in X$ scegliamo $A_p \in \mathcal{B}$ e $U_p \in \mathcal{R}$ t.c. $p \in A_p \subseteq U_p$. La famiglia $\{A_p \mid p \in X\}$ ricopre X e in realtà è numerabile, perché è contenuta in $\mathcal{B}$, quindi possiamo scegliere una fam. numerabile di punti $\{p_n \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ tale che $\bigcup_n A_{p_n} = X$.

Poniamo $\mathcal{R}' = \{U_{p_n} \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$: è una famiglia numerabile, è anche un ricoprimento aperto di X perché gli insiemi A_{p_n} ricoprono X, e $\mathcal{R}'$ non ha sottoricoprim. finiti altrimenti ne avrebbe anche $\mathcal{R}$.

Scriviamo per brevità $U_n = U_{p_n}$, per ogni n scegliamo

$$a(n) \in X \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} U_n \right)$$ definendo la successione a.

Dimostriamo che a non ammette sottosucc. convergenti. Sia $p \in X$ e sia $b(k) = a(f(k))$ sottosuccessione. Sappiamo che $\exists N$ t.c. $p \in U_N$, e per k abb. grande vale $f(k) \geq N$, e allora $b(k)$ non è in U_N: allora b non converge a p, per alcun p: assurdo. $\square$

Successioni di Cauchy

Def.: Sia (X, d) spazio metrico e a successione in X. a è detta di Cauchy se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \mid d(a_n, a_m) < \varepsilon$ $\forall n, m \geq N$.

Oss.: Se una successione è convergente allora è di Cauchy, grazie alla disuguaglianza triangolare.

Esercizio: Se una successione di Cauchy ha una sottosucc. convergente, allora è convergente.

Def.: Uno spazio metrico si dice completo se ogni successione di Cauchy è convergente.

Teorema: $\mathbb{R}^n$ è completo.

Dim.: Sia a succ. di Cauchy, sia N tale che $d(a_n, a_m) < 1$ $\forall n, m \in N$. Sia $R = \max\{\|a(0)\|, \dots, \|a(N)\|\}$, allora $\|a_n\| \leq R+1$ $\forall n \geq N$, cioè $a_n \in D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq R+1\}$.

D è compatto e 1°-numerabile (perché è uno sp. metrico), allora è compatto per successioni, quindi a ammette una sottosucc. convergente, e segue che a è convergente per l'esercizio di prima. $\square$

Proposizione: Sia Y sottosp. topologico di X spazio metrico completo.

$$Y \text{ è chiuso in } X \iff Y \text{ è uno spazio metrico completo}$$
(con la restrizione della distanza su X)

Dim.: $\Rightarrow$] Sia Y chiuso in X e sia a succ. di Cauchy in Y.

Converge a un punto $p \in X$ perché X è completo, allora

p è nella chiusura dell'immagine di a, ma quest'immagine è

in Y che è chiuso, per cui $p \in Y$. Cioè a converge anche

in Y.

$\Leftarrow$] Sia $p \in \overline{Y}$, visto che X è 1°-numerabile (essendo uno

spazio metrico) esiste una succ. contenuta in Y che converge a p.

Allora è di Cauchy, quindi converge anche in Y a un punto $q \in Y$.

Ma X è T2 perché è uno sp. metrico, quindi $p = q$, cioè

$p \in Y$. $\square$

Compattezza e numerabilità per spazi metrici

Def.: Uno spazio metrico X si dice <u>totalmente limitato</u> se

$$\forall r \in \mathbb{R}_{>0} \ \exists x_1, \dots, x_n \in X \mid X = \bigcup_{i=1}^{n} B_r(x_i)$$

(Att.: il numero n di punti e i punti stessi $x_1, \dots, x_n$ possono dipendere da r.)

Lemma: Ogni spazio metrico totalmente limitato è separabile (quindi anche 2°-numerabile)

Dim.: Dato $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ consid. E_m un insieme finito tale che X è ricoperto dalle palle aperte di raggio $\frac{1}{m}$ e centri gli elem. di E_m.

Allora $E = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}_{>0}} E_m$ è numerabile, ed è denso perché ogni $x \in X$ è a distanza $< \frac{1}{m}$ da qualche elem. di E_m, per ogni m. □

Teorema: Sia X spazio metrico. Sono equivalenti:

1) X è compatto,
2) X è compatto per successioni,
3) X è completo e totalmente limitato.

Dim.: $1) \Longrightarrow 2)$ Vale perché X è 1°-numerabile.

$2) \Longrightarrow 3)$ Supp. X compatto per successioni. Ogni succ. di Cauchy ammette una sottosucc. convergente, quindi converge essa stessa, quindi X è completo.

Dimostriamo che è anche totalmente limitato, per assurdo:

Supponiamo esista $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tale che X non è ricopribile con un numero finito di palle aperte di raggio r.

Costruiamo una successione:

a_1 a piacere in X

$a_2 \in X \setminus B(a_1, r)$

$a_3 \in X \setminus (B(a_1,r) \cup B(a_2, r))$

$\vdots$

$a_n \in X \setminus (B(a_1,r) \cup \dots \cup B(a_{n-1}, r))$

Con questa scelta vale $d(a_n, a_m) \geq r$ $\forall n \neq m$, quindi nessuna sottosucc. può essere di Cauchy, quindi nessuna sottosucc. può convergere: assurdo.

$\boxed{3) \Rightarrow 1)}$ Supp. X completo e totalm. limitato.

Per il lemma, X è 2°-numerabile, quindi per dim. che è compatto basta dim. che è compatto per successioni.

Sia a successione in X, per ogni $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ consid. un insieme finito E_m tale che

$$X = \bigcup_{e \in E_m} B_{2^{-m}}(e)$$

Costruiamo una sottosucc. convergente:

per $m=1$ scegliamo $e_1 \in E_1$ tale che $B(e_1, 2^{-1})$ contiene $a(n)$ per infiniti valori di n. Scegliamo anche k_1 tale che $a(k_1) \in B(e_1, 2^{-1})$;

per $m=2$ scegliamo $e_2 \in E_2$ tale che $B(e_1, 2^{-1}) \cap B(e_2, 2^{-2})$ contiene $a(n)$ per infiniti valori di n. Scegliamo anche k_2 tale che $a(k_2) \in B(e_1, 2^{-1}) \cap B(e_2, 2^{-2})$ e $k_2 > k_1$.

Andando avanti costruiamo la sottosucc. $a(k_1), a(k_2), \ldots$ e si dimostra facilmente che è di Cauchy, quindi converge perché X è completo. Allora X è compatto per successioni.

$\square$

Complementi: sottobasi e prodotti infiniti

In questa sezione è utile definire l'intersezione vuota di sottoinsiemi di un insieme fissato X. Data una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X, l'intersez. $\bigcap \mathcal{F}$ è definita come $\{p \in X \mid \forall A \in \mathcal{F} : p \in A\}$. Con questa convenzione è definita anche l'intersezione della famiglia vuota $\mathcal{F} = \emptyset$, e vale in questo caso $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap \emptyset = \{p \in X \mid \forall A \in \mathcal{F} : p \in A\} = X$.

Def.: Sia $(X, \mathcal{T})$ uno sp. topologico. Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia di aperti, e sia $\mathcal{B} = \{$ intersezioni di un numero finito di elem.

di $\mathcal{S}\}$ (qui ammettiamo anche l'intersezione di <u>nessun</u> elem. di $\mathcal{S}$).

Se $\mathcal{B}$ è una base di $\mathcal{T}$, allora $\mathcal{S}$ è detta <u>sottobase</u>.

<u>Oss.</u>: Dato un insieme X e una famiglia <u>qualsiasi</u> $\mathcal{S}$ di sottoinsiemi di X, è facile dim. che esiste sempre una topologia su X per cui $\mathcal{S}$ è una sottobase.

Siano ora X_i spazi topologici $\forall i \in I$ = insieme qualunque.

Consideriamo il prodotto di tutti gli spazi topologici

$$X = \prod_{i \in I} X_i.$$

che possiamo definire come l'insieme delle applicazioni

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$$

tali che $f(i) \in X_i \ \forall i \in I$. Ricordiamo che l'assioma della scelta dice che $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$.

Su X si possono mettere in genere diverse topologie.

<u>Def</u>: La <u>topologia prodotto</u> è la meno fine che rende continue le proiezioni

$$\pi_i : X \longrightarrow X_i$$
$$f \longmapsto f(i)$$

Quindi in top. prodotto sono aperti sicuramente i sottoinsiemi del tipo

$$\prod_{i\in I} A_i \qquad \text{dove} \qquad A_i = \begin{cases} \text{aperto di } X_{i_0} & \text{se } i=i_0 \\ X_i & \text{se } i\neq i_0 \end{cases}$$

per <u>un</u> $i_0 \in I$. Questa è una <u>sottobase</u> della top. prodotto; ma <u>non</u> sono in genere aperti i sottoinsiemi del tipo

$$\prod_{i\in I} B_i \qquad \text{con} \qquad B_i \subseteq X_i \text{ aperto } \forall i \in I.$$

(lo sono se I è finito, naturalmente).

<u>Teorema</u> (Tychonof): Se X_i è compatto $\forall i$, allora X è compatto.

<u>Oss.</u>: 1) Il teo. di Tychonof è equivalente all'assioma della scelta.

2) Se $I=\mathbb{R}$ e $X_i=\mathbb{R}$ $\forall i\in I$, allora

$$X=\prod_{i\in\mathbb{R}}\mathbb{R}=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$$

Su X e su suoi sottospazi (es. le funi continue, derivabili, ecc...) si mettono diverse topologie, utili in analisi.

TOPOLOGIA ALGEBRICA

Omotopia

Def.: Due applicaz. $f, g: X \to Y$ continue fra spazi topologici si dicono **omotope** se esiste $F: X \times [0,1] \longrightarrow Y$ continua t.c. $F(x,0) = f(x)$ e $F(x,1) = g(x)$ $\forall x \in X$. In tal caso F si dice **omotopia** fra f e g.

Oss.: Spesso si pensa F come una famiglia $\{f_t : X \to Y\}$ con $F(x,t) = f_t(x)$ di appl. $X \to Y$ che „varia in modo continuo", partendo da $f_0 = f$ per $t=0$ fino a $f_1 = g$ per $t=1$.

Esempio: Se $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso e X è qualsiasi, allora qualsiasi siano $f, g: X \to Y$ sono omotope, basta porre

$$F(x,t) = f(x) \cdot (1-t) + g(x) \cdot t \qquad (\text{è in } Y \ \forall x \in X \ \forall t \in [0,1]).$$

Lemma: L'omotopia è una rel. d'equivalenza sull'insieme $C(X,Y) = \{ f: X \to Y \text{ continua} \}$, $\forall X, Y$ sp. top..

Dim.: 1) Ogni f è omotopa a se stessa tramite

$F(x,t) = f(x) \quad \forall x \in X \ \forall t \in [0,1]$

2) Se F è omotopia fra f e g, allora $\tilde{F}(x,t) = F(x, 1-t)$ è omotopia fra g ed f.

3) Se F è omotopia fra f e g, e G è omotopia fra g ed h, allora

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(x, 2t-1) & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

è un'omotopia fra f ed h.

$\square$

<u>Esempio:</u> Consid. $f : S^n \longrightarrow S^n$ la mappa antipodale.
$x \longmapsto -x$

Domanda: f è omotopa all'identità $id_{S^n} : S^n \to S^n$?

E' una domanda difficile, vediamo casi particolari.

Se $n=1$ allora f è omotopa all'identità, perché basta prendere come F la rotazione attorno all'origine di un angolo $t \cdot \pi$, allora per $t=0$ abbiamo l'identità, invece se $t=1$ allora abbiamo la rotazione di π, che è proprio f.

Possiamo applicare quest'idea per ogni n dispari, invece per n pari f e id_{S^n} non sono omotope. Vediamo con precisione il caso n dispari. Vediamo S^n dentro $\underset{\text{pari}}{\mathbb{R}^{n+1}} = \mathbb{C}^{\frac{n+1}{2}}$, cioè

$$S^n = \left\{ z \in \mathbb{C}^{\frac{n+1}{2}} \;\middle|\; \|z\| = 1 \right\}$$

e definiamo $F(z,t) = z e^{i\pi t}$, che è effettivam. un'omotopia da id_{S^n} a f.

Definizione: Un'applicazione continua $f: X \to Y$ si dice equivalenza omotopica se esiste $g: Y \to X$ continua tale che $g \circ f: X \to X$ è omotopa all'identità id_X, e $f \circ g: Y \to Y$ è omotopa all'identità id_X.

Due spazi topologici si dicono omotopicam. equivalenti se esiste una equivalenza omotopica fra X e Y.

Oss.: Un omeomorfismo è anche un'equivalenza omotopica, quindi spazi omeomorfi sono anche omotopicam. equivalenti. Il viceversa non vale, cioè l'equivalenza omotopica è una relazione più debole dell'omeom.

Infatti ad esempio tutti i sottospazi convessi non vuoti di $\mathbb{R}^n$ sono omotopicamente equivalenti, vediamolo:

siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ convessi non vuoti, prendiamo due applicazioni costanti $f: X \to Y$ e $g: Y \to X$. Allora $f \circ g$ e $g \circ f$ sono appl. continue e omotope rispettivam. all'identità su Y e su X, perché i codomini sono convessi.

Definizione: Uno spazio topologico si dice contraibile (o contrattile) se è omotopicam. equivalente a un singolo punto.

Oss.: 1) X è contraibile se e solo se $Id_X: X \to X$ è omotopa a un'applicazione costante $X \to X$.

2) X contraibile $\Longrightarrow$ X connesso per archi

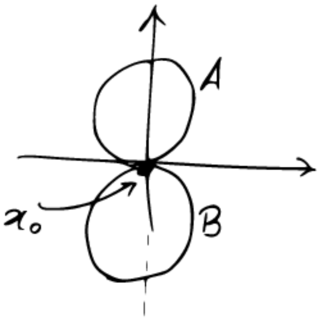
Il viceversa non è vero, ad es. vedremo che S^1 non è contraibile.

Retrazioni e deformazioni

Definizione: Sia X sp. topologico. Un sottospazio $Y \subseteq X$ si dice retratto di X se esiste un'applicazione continua $r: X \to Y$ tale che $r(y) = y \quad \forall y \in Y$.

Esempio: Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ dato dall'unione di due circonferenze A e B

che si toccano in un punto:



$X = A \cup B$

$A \cap B = \{x_0\}$

Allora A è un retratto di $X = A \cup B$, ad es.

$$r: X \longrightarrow A$$
$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{se } x \in A \\ x_0 & \text{se } x \in B \end{cases}$$

<u>Definizione</u>: Sia X spazio topologico. Un sottospazio $Y \subseteq X$ si dice <u>retratto per deformazione</u> di X se esiste un'applicazione continua (detta <u>deformazione</u>)

$$R: X \times [0,1] \longrightarrow X$$

tale che

1) $R(x,0) \in Y$ e $R(x,1) = x \quad \forall x \in X$

2) $R(y,t) = y \quad \forall y \in Y \ \forall t \in [0,1]$

<u>Esempio</u>: 1) Se $A \in \mathbb{R}^n$ è <u>stellato</u>, cioè esiste un punto $p \in A$ tale che $\forall a \in A$ il segmento da p ad a è tutto contenuto in A,

allora $\{p\}$ è un retratto per deformazione di A, basta prendere

$$R(x,t) = tx + (1-t)p$$

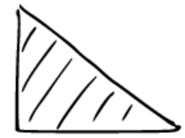
2) Riprendiamo $X = A \cup B$ l'unione di due circonferenze come prima. Allora A <u>non è</u> un retratto per deformazione di X, ma non è facile dimostrarlo, lo vedremo.

<u>Proposizione</u>: Siano X uno sp. topologico, e $Y \subseteq X$ un retratto per deformazione di X. Allora Y è un retratto di X, e l'inclusione
$$\iota : Y \longrightarrow X, \quad y \longmapsto y$$
è un'equivalenza omotopica.

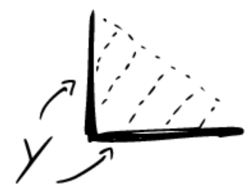
<u>Dim.</u>: Sia $R : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ una deformazione. Allora ponendo
$$r : X \longrightarrow Y, \quad x \longmapsto R(x,0)$$
otteniamo chiaramente una retrazione, quindi Y è un retratto di X. Inoltre, dalle proprietà di R segue anche che R stessa è un'omotopia fra $\iota \circ r$ e Id_X, e anche che $r \circ \iota$ è proprio <u>uguale</u> all'identità id_Y.
Quindi r (e anche l'inclusione ι) è un'equivalenza omotopica. $\square$

<u>Esempi</u>: 1) S^n è un retratto per deformazione di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, basta prendere la deformazione
$$R : (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$
$$(x,t) \longmapsto tx + \frac{x}{\|x\|} \cdot (1-t)$$

2) X = triangolo („pieno") in $\mathbb{R}^2$

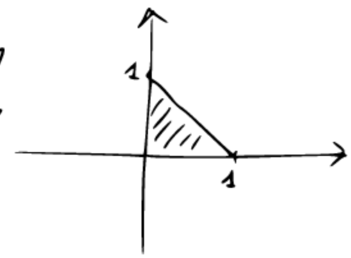


Y = unione di due lati del triangolo

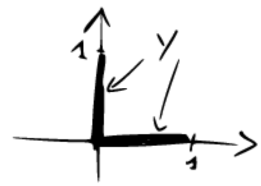


allora Y è retratto per deformazione di X. Vediamolo in dettaglio in un esempio concreto (in generale è simile):

$$X = \{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq 0,\ b \geq 0,\ a+b \leq 1 \}$$



$$Y = X \cap (\text{assi cartesiani})$$



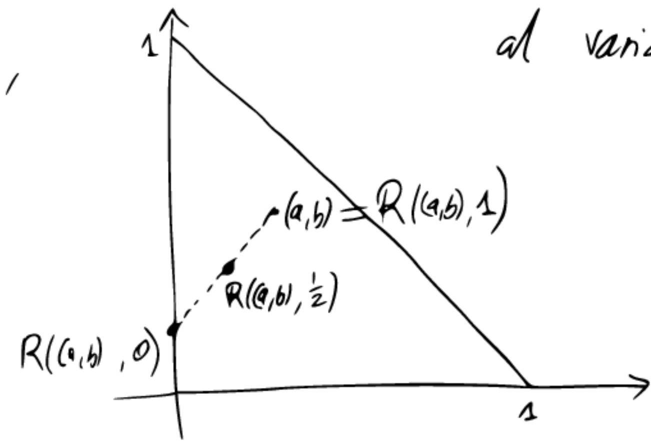
Una deformazione si può dare in tanti modi, l'idea è di „schiacciare" (al variare di un parametro $t \in [0,1]$) il triangolo X sui due lati

$t=1$ . . . . . . $t=0$ (← per la definizione, devo avere Y come immagine per $t=0$)

Ad es.

$$R((a,b),t) = t\,(a,b) + (1-t)\,(a - \min\{a,b\},\ b - \min\{a,b\})$$

fa „percorrere" ad ogni punto (a,b) il segmento a 45° verso gli assi, al variare di t da 1 a 0.



Gruppo fondamentale

Cammino in uno spazio topologico X: applicaz. continua $\alpha : [0,1] \to X$

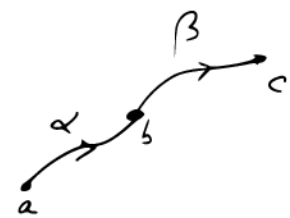
$\alpha(0) =$ „punto iniziale", $\alpha(1) =$ „punto finale". Il cammino α si dice chiuso se $\alpha(0) = \alpha(1)$, e il punto $x_0 = \alpha(0) = \alpha(1)$ si chiama punto base.

Definizione: 1) Sia X spazio topologico, e $a, b \in X$. Denotiamo con

$$\Omega(X, a, b) = \left\{ \alpha : [0,1] \to X \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha \text{ cammino con} \\ \alpha(0) = a, \ \alpha(1) = b \end{array} \right\}.$$

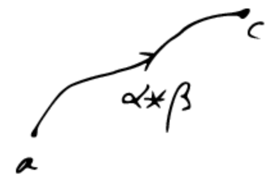
2) Dati $a, b, c \in X$ e $\alpha \in \Omega(X, a, b)$, $\beta \in \Omega(X, b, c)$,

si definisce la giunzione (o concatenazione)

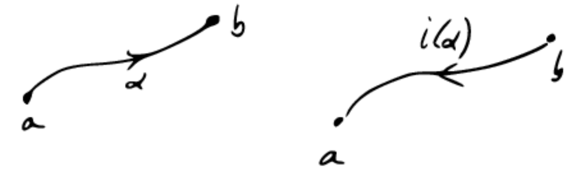


$\alpha * \beta \in \Omega(X, a, c)$ come

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ \beta(2t-1) & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



e si definisce l'<u>inversione</u> di α, denotata $i(\alpha) \in \Omega(X, b, a)$, come $i(\alpha)(t) = \alpha(1-t)$.



<u>Oss.</u>: Abbiamo $i(i(\alpha)) = \alpha$, $i(\alpha * \beta) = i(\beta) * i(\alpha)$, che si verificano facilmente.

<u>Definizione</u>: Dati cammini $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$, si dicono <u>omotopicamente equivalenti</u> se sono omotopi tramite un'omotopia che lascia fissi a e b per ogni valore del parametro. Cioè deve esistere $F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ continua, tale che

si scrive $\alpha \sim \beta$

1) $F(t, 0) = \alpha(t)$, $F(t, 1) = \beta(t)$ $\forall t \in [0,1]$

(cioè F è omotopia da α a β)

2) $F(0, s) = a$, $F(1, s) = b$ $\forall s \in [0,1]$

Una tale F si dice <u>omotopia di cammini</u>.

<u>Oss.</u>: 1) L'omotopia di cammini così definita è una relaz. di equivalenza.

2) <u>Attenzione</u> alla terminologia: <u>omotopia di cammini</u> è una nozione

più restrittiva dell'omotopia „standard" (che potremmo considerare anche per due cammini). Nel corso sarà facile non sbagliarsi: fra cammini considereremo solo l'omotopia di cammini, e mai l'omotopia „standard".

Esempio: Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso e $a, b \in X$ sono punti qualsiasi, allora ogni α e $\beta \in \Omega(X, a, b)$ sono cammini omotopicam. equivalenti

Oss.: Giunzione e inversione sono ben definite anche fra le classi di omotopia di cammini, cioè dati

$$\alpha, \alpha' \in \Omega(X, a, b), \quad \alpha \sim \alpha'$$

$$\beta, \beta' \in \Omega(X, a, b), \quad \beta \sim \beta'$$

allora $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$ (la verifica è immediata, basta „appiccicare" le due omotopie da α ad α' e da β a β') e anche $i(\alpha) \sim i(\alpha')$ (qui basta rimpiazzare t con $1-t$ nell'omotopia da α ad α').

Vediamo ora che passando da un cammino ad una „riparametrizzazione" si ottiene un cammino equivalente a quello di partenza.

Lemma: Sia $\alpha \in \Omega(X, a, b)$ e sia $\Phi: [0,1] \to [0,1]$ continua tale che $\Phi(0) = 0$, $\Phi(1) = 1$. Allora α è equivalente a $\beta \in \Omega(X, a, b)$ definito come $\beta(t) = \alpha(\Phi(t))$.

 Dim: Un'omotopia di cammini da α a β è $F(t, s) = \alpha\big((1-s)t + s\Phi(t)\big)$ $\square$

Oss.: In generale, la giunzione <u>non è</u> associativa, se consideriamo i cammini veri e propri. Però è associativa a meno di omotopia di cammini; l'idea è che $(\alpha*\beta)*\gamma$ e $\alpha*(\beta*\gamma)$ differiscono solo per una riparametrizzazione.

<u>Proposizione:</u> Dati $\alpha\in\Omega(X,a,b)$, $\beta\in\Omega(X,b,c)$, $\gamma\in\Omega(X,c,d)$ abbiamo $(\alpha*\beta)*\gamma \sim \alpha*(\beta*\gamma)$.

<u>Dim.:</u> $\big((\alpha*\beta)*\gamma\big)(t) = \big(\alpha*(\beta*\gamma)\big)\big(\varphi(t)\big)$ dove

$$\varphi(t)=\begin{cases} 2t & \text{per } t\in[0,\frac{1}{4}] \\ t+\frac{1}{4} & \text{per } t\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}] \\ \frac{t+1}{2} & \text{per } t\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

$\square$

<u>Definizione</u>: Nell'insieme $\Omega(X,\underbrace{a,a}_{\text{uguali}})$ è definito il cammino costante $1_a:[0,1]\longrightarrow X$ come $1_a(t)=a$ $\forall t$.

<u>Proposizione:</u> Dato $\alpha\in\Omega(X,a,b)$ allora sono definiti $1_a*\alpha$ e $\alpha*1_b$, e vale:

1) $1_a*\alpha \sim \alpha \sim \alpha*1_b$

2) $\alpha*i(\alpha)\sim 1_a$, $i(\alpha)*\alpha\sim 1_b$

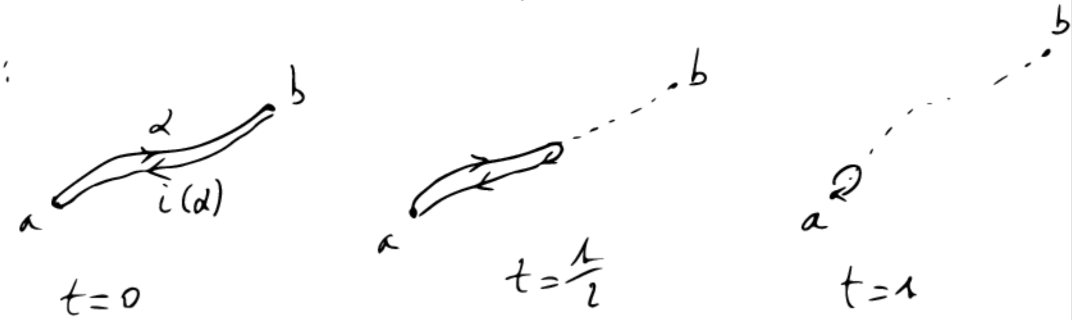
(cioè, a meno di omotopia, 1_a ha il ruolo di elem. neutro e $i(\alpha)$ ha il ruolo di inverso di α).

<u>Dimostrazione:</u> 1) Le omotopie di cammini si ottengono riparametrizzando.

$$(1_a * \alpha)(t) = \alpha(\psi(t)) \quad \text{dove} \quad \psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2t-1 & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$(\alpha * 1_b)(t) = \alpha(\eta(t)) \quad \text{con } \eta(t) \text{ analoga.}$$

2) Idea:

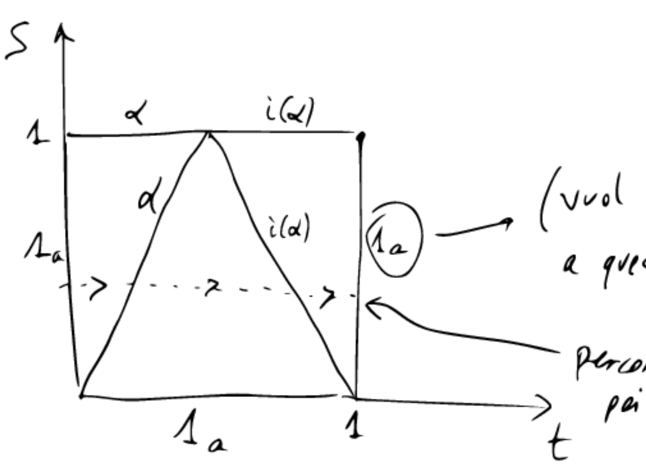


(cioè i cammini „intermedi" si ottengono percorrendo <u>solo un pezzo</u> di α, e poi tornando indietro con $i(\alpha)$)

Questo si realizza con l'omotopia seguente:

$$F(t,s) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{per } t \in [0, \frac{s}{2}] \\ \alpha(s) & \text{per } t \in [\frac{s}{2}, 1 - \frac{s}{2}] \\ \alpha(2-2t) & \text{per } t \in [1 - \frac{s}{2}, 1] \end{cases}$$

Schematicamente:



(vuol dire che restringendo F a questo segmento si ottiene 1_a)

Percorre un pezzo di α, poi sta fermo per un po', poi torna indietro.

$\square$

Definizione: Sia X spazio topologico, $a \in X$. Definiamo

$$\pi_1(X, a) = \frac{\Omega(X, a, a)}{\sim}$$

$\sim$ ← omotopia di cammini

Come al solito, dato $\alpha \in \Omega(X, a, a)$ denotiamo $[\alpha] \in \pi_1(X, a, a)$ la sua classe d'equivalenza.

Teorema: Con la giunzione e l'inversione (di classi di cammini), $\pi_1(X, a)$ è un gruppo, con elemento neutro $[1_a]$. Cioè l'operazione di gruppo è

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$$

e l'inverso di $[\alpha]$ è $[\alpha]^{-1} = [i(\alpha)]$.

Dim.: E' una conseguenza immediata di quanto visto finora. $\square$

Definizione: $\pi_1(X, a)$ si dice gruppo fondamentale (o primo gruppo di omotopia) di X (con punto base a).

Oss.: Sia X_0 la componente connessa per archi di X contenente a. Allora ogni cammino $\alpha \in \Omega(X, a, a)$ è in realtà tutto contenuto in X_0.

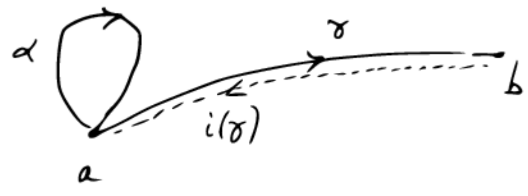
Segue che $\pi_1(X, a)$ dipende solo da X_0 (anche se formalmente π_1 è definito usando tutto X).

Esempio: Ovviamente se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso allora $\pi_1(X, a)$ è banale (cioè contiene solo l'elem. neutro) $\forall a \in X$.

Oss.: Attenzione: se $a, b \in X$ appartengono alla stessa componente connessa per archi, i gruppi $\pi_1(X, a)$ e $\pi_1(X, b)$ sono strettamente legati fra loro, ma non sono lo stesso gruppo. Vediamolo in dettaglio:

Lemma: Siano a, b nella stessa componente connessa per archi di X. Scegliamo $\gamma \in \Omega(X, a, b)$ un cammino da a a b, e definiamo un'applicazione

$$\begin{aligned} \gamma_\# : \pi_1(X, a) &\longrightarrow \pi_1(X, b) \\ [\alpha] &\longmapsto [i(\gamma) * \alpha * \gamma] \end{aligned}$$



$\gamma_\#([\alpha]) =$ 

Allora $\gamma_\#$ è ben definita ed è un isomorfismo di gruppi.

Dim: $\gamma_\#$ è ben definita, perché (abb. già visto che) "la concatenazione si comporta bene" con l'omotopia di cammini, cioè se $\alpha \sim \alpha'$ allora $i(\gamma) * \alpha * \gamma \sim i(\gamma) * \alpha' * \gamma$.

Dim. che $\gamma_\#$ è un omom. di gruppi: dati $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, a)$ dim. che

$$\underbrace{\gamma_\#([\alpha]) \cdot \gamma_\#([\beta])}_{\cdot\ =\ \text{op. in } \pi_1(X,b)} \overset{(?)}{=} \gamma_\#(\underbrace{[\alpha] \cdot [\beta]}_{\cdot\ =\ \text{op. in } \pi_1(X,a)})$$

Abb:

$$\gamma_\#([\alpha]) \cdot \gamma_\#([\beta]) = [i(\gamma) * \alpha * \gamma] \cdot [i(\gamma) * \beta * \gamma] =$$

$$= [i(\gamma) * \alpha * \underbrace{\gamma * i(\gamma)}_{\text{cammino omotopo a } 1_a} * \beta * \gamma] = [i(\gamma) * \alpha * \underbrace{1_a * \beta}_{\text{omotopo a } \beta} * \gamma] =$$

per quello che abb. osservato prima riguardo a giunzione e omot. di cammini

$$= [i(\gamma) * \alpha * \beta * \gamma] = \gamma_\#([\alpha * \beta]) = \gamma_\#([\alpha] \cdot [\beta]).$$

Quindi $\gamma_\#$ è un omomorfismo di gruppi. Dim. che è un isomorfismo dandone l'inversa: è $i(\gamma)_\# : \pi_1(X, b) \longrightarrow \pi_1(X, a)$.

Infatti $(i(\gamma)_\#) \circ \gamma_\# = Id_{\pi_1(X,a)}$, perché

$$(i(\gamma)_\#)\left(\gamma_\#([\alpha])\right) = (i(\gamma)_\#)\left([i(\gamma) * \alpha * \gamma]\right) =$$

$$= [\underbrace{i(i(\gamma))}_{= \gamma} * i(\gamma) * \alpha * \gamma * i(\gamma)] = [\underbrace{\gamma * i(\gamma)}_{\text{omotopo a } 1_a} * \alpha * \underbrace{\gamma * i(\gamma)}_{\text{omotopo a } 1_a}] =$$

$$= [1_a * \alpha * 1_a] = [\alpha].$$

E si verifica analogam. che $\gamma_\# \circ (i(\gamma)_\#) = Id_{\pi_1(X,b)}$, per cui $\gamma_\#$ e $i(\gamma)_\#$ sono una l'inverso dell'altra.

$\square$

<u>Oss.</u>: 1) Il gruppo fondamentale è utile per dimostrare che due sp. topologici <u>non</u> sono omeomorfi, lo vedremo in dettaglio. L'idea è che se sono omeomorfi allora i gruppi fondamentali sono isomorfi (va fatta attenzione ai punti base però).
Vedremo anche che lo stesso vale con l'equivalenza omotopica invece dell'omeomorfismo.

2) Se X è connesso per archi, si parla anche semplicemente di gruppo fondam. di X senza riferimento al punto base, e si scrive $\pi_1(X)$. E' una nozione imprecisa tuttavia, nel senso che è un gruppo "definito a meno di isomorfismo".

__Definizione:__ Uno sp. topologico X si dice __semplicemente connesso__ se è connesso per archi e se $\pi_1(X)$ è banale (più precisamente diremmo che $\pi_1(X,a)$ è banale per un $a \in X$, e quindi è banale per ogni $a \in X$).

__Proposizione:__ Siano X, Y spazi topologici, $a \in X$, $b \in Y$. Allora $\pi_1(X \times Y, (a,b))$ è isomorfo a

$$\pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b).$$

↑ prodotto di gruppi

__Dim.:__ Ogni cammino $\alpha : [0,1] \to X \times Y$ è univocam. determinato dalle sue componenti $\alpha_1 : [0,1] \to X$ e $\alpha_2 : [0,1] \to Y$ dove $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, viceversa dati cammini α_1, α_2 allora α è definito. Questo induce una biiezione

$$\begin{aligned} \Omega(X \times Y, (a,b), (a,b)) &\longrightarrow \Omega(X, a, a) \times \Omega(Y, b, b) \\ \alpha &\longmapsto (\alpha_1, \alpha_2) \end{aligned}$$

Lo stesso vale per le omotopie di cammino $F : [0,1] \times [0,1] \to X \times Y$, quindi la biiezione passa ai quozienti

$$\pi_1(X \times Y, (a,b)) \longrightarrow \pi_1(X,a) \times \pi_1(Y,b)$$
$$[\alpha] \longmapsto ([\alpha_1], [\alpha_2])$$

Si verifica facilmente che si tratta di un omomorfismo biiettivo di gruppi, cioè un isomorfismo.

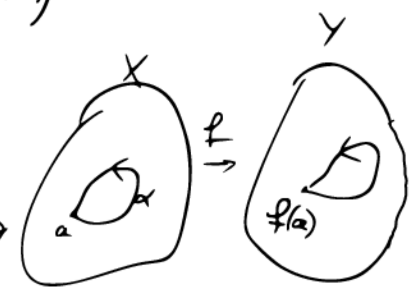
$\square$

Proprietà funtoriali

Sia $f: X \to Y$ appl. continua fra spazi topologici. Dato $a \in X$ definiamo

$$f_*: \pi_1(X,a) \longrightarrow \pi_1(Y, f(a))$$
$$[\alpha] \longrightarrow [f \circ \alpha]$$

$$[0,1] \xrightarrow{\alpha}$$



<u>Proposizione</u>: f_* è ben definita (cioè $f_*([\alpha])$ non dipende dalla scelta di $\alpha \in [\alpha]$) ed è un omom. di gruppi.

<u>Dim.</u>: In generale dati $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$ con $\alpha \sim \beta$, allora $f \circ \alpha$ e $f \circ \beta$ sono in $\Omega(Y, f(a), f(b))$ e vale $f \circ \alpha \sim f \circ \beta$. Infatti se $F: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ è un'omotopia di cammini da α a β, allora la composizione

$f\circ F : [0,1]\times[0,1] \to Y$ è un'omotopia di cammini da $f\circ\alpha$ a $f\circ\beta$.

Quindi f_* è ben definita. Inoltre dati $\alpha \in \Omega(X,a,b)$ e $\beta\in\Omega(X,b,c)$ vale

$$f\circ(\alpha*\beta) = (f\circ\alpha)*(f\circ\beta)$$

da cui f_* è un omom. di gruppi.

(Vale anche $i(f\circ\alpha) = f\circ(i(\alpha))$.)

$\square$

<u>Es.</u>: Se prendo $Id_X : X\to X$, allora $(Id_X)_*$ è l'identità su $\pi_1(X,a)$

Se invece considero $f: X\to X$ costante ($f(x)=c$ fissato, $\forall x\in X$) allora $f_*: \pi_1(X,a)\to\pi_1(X, \underset{(c)}{\overset{\shortparallel}{f(a)}})$ è l'omomorfismo banale, che manda ogni elem. nell'elem. neutro.

<u>Lemma</u>: Sia X uno sp. topologico, $A\subseteq X$, $a\in A$. Consideriamo l'inclusione $\iota: A\to X$, e l'omom. $\iota_*: \pi_1(A,a)\to\pi_1(X,a)$.

1) Se A è retratto di X, allora ι_* è iniettivo.

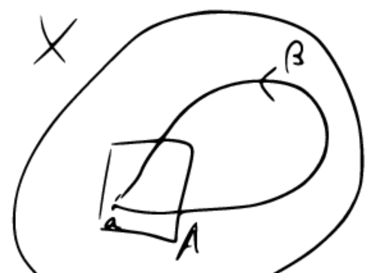
2) Se A è retratto per deformazione, allora ι_* è un isomorfismo.

<u>Dim.</u>: 1) Sia $\alpha\in\Omega(A,a,a)$ tale che $\iota_*([\alpha]) = e_{\pi_1(X,a)}$

(e_G = elem. neutro del gruppo G)

Cioè esiste un'omotopia di cammini $F: [0,1]\times[0,1] \to X$ da α a 1_a.
Sia ora $R: X \to A$ retrazione. Allora $R \circ F$ è un'omotopia di cammini in A dallo stesso α ad 1_a.
Cioè α è omotopo a 1_a anche in A, cioè $[\alpha]$ è banale anche in $\pi_1(A,a)$, quindi ι_* è iniettiva.

2) Sia ora A retratto per deformazione di X. Sia
$D: X \times [0,1] \to X$ deformazione di X su A.
In particolare ι_* è iniettiva perché A è un retratto. Dobb. dim. che ι_* è suriettiva.



Sia $\beta \in \Omega(X, a, a)$, definiamo
$F: [0,1]\times[0,1] \to X$ ponendo

$F(t,s) = D(\beta(t), s)$.

Abb. $F(-,1) = \beta(-)$, $F(-,0) = \beta'(-)$ con
$\beta': [0,1] \to A$ continua, e F è omotopia di cammini da β' a β (oss.: F mantiene fissi i punti iniziali e finali

dei cammini perché D è l'identità su A per ogni valore di s).

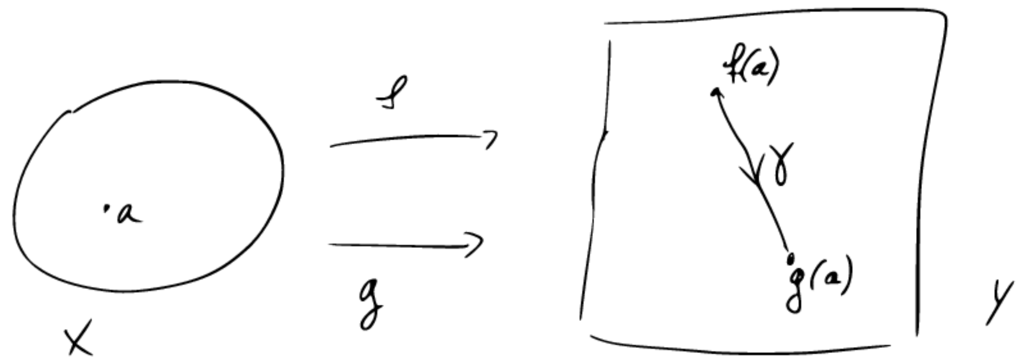
D'altronde $[\beta'] \in \iota_*(\pi_1(A,a))$ e $[\beta]=[\beta']$ in $\pi_1(X,a)$,

cioè ι_* è suriettiva. $\square$

<u>Proposizione:</u> Siano $f, g : X \to Y$ appl. continue fra spazi topologici.

Supponiamo siano omotope, e sia $F : X \times [0,1] \to Y$ un'omotopia da f a g. Sia $a \in X$, e sia $\gamma : [0,1] \to Y$ def. come

$$\gamma(t) = F(a,t).$$



Consid.

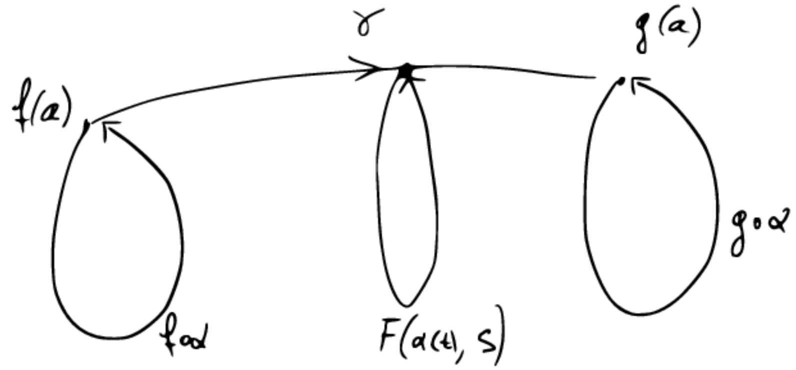
$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,a) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \pi_1(Y, f(a)) \arrow[d, "\gamma_\#"] \\
& \pi_1(Y, g(a))
\end{tikzcd}$$

Allora il diagramma è commutativo, cioè $g_* = \gamma_\# \circ f_*$.

<u>Dim.:</u> Consid. $[\alpha] \in \pi_1(X, a)$. Abb.:

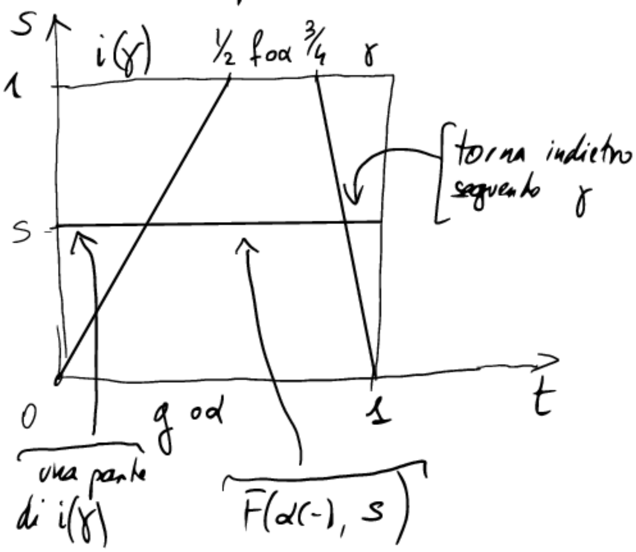
$$g_*([\alpha]) = [g \circ \alpha] \qquad (\gamma_\# \circ f_*)([\alpha]) = [i(\gamma) * (f\circ\alpha) * \gamma]$$

In Y:



Sia F omotopia da g a f.

Diamo un'omotopia di cammini esplicita da $g\circ\alpha$ a $\gamma * \big((f\circ\alpha) * i(\gamma)\big)$:



$$G(t,s) = \begin{cases} i(\gamma)(2t) & \text{per } t \in [0, \frac{1}{2}s] \\ F\left(\alpha\left(\dfrac{4t-2s}{4-3s}\right), s\right) & \text{per } t \in [\frac{1}{2}s, 1-\frac{1}{4}s] \\ \gamma(4t-3) & \text{per } t \in [1-\frac{1}{4}s, 1] \end{cases}$$

per $t = \frac{1}{2}s$ fa zero, per $t = 1 - \frac{1}{4}s$ fa 1

Esercizio: verificare che G è continua ed è un'omotopia di cammini da $g\circ\alpha$ a $i(\gamma) * \big((f\circ\alpha) * \gamma\big)$. $\square$

Corollario: Sia $g: X \to X$ appl. continua e omotopa all'identità. Dato $a \in X$, abb. $g_*: \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(X, g(a))$ è un isomorfismo.

Dim: Applichiamo la proposiz. con $X = Y$, $f = Id_X$, e $\gamma_\#$ come nella proposizione:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(X,a) \arrow[d, "\gamma_\#"] \\
\pi_1(X,a) \arrow[ur, "(Id_X)_*"] \arrow[r, "g_*"'] & \pi_1(X, g(a))
\end{tikzcd}$$

Segue $g_* = \gamma_\# \circ (Id_X)_*$, e sappiamo: $(Id_X)_*$ è l'identità su $\pi_1(X,a)$, e $\gamma_\#$ è un isomorfismo, per cui anche g_* è un isom..

□

<u>Teorema:</u> Siano X, Y spazi topologici e $f: X \to Y$ un'equivalenza omotopica. Dato $a \in X$, l'applicazione $f_*: \pi_1(X,a) \longrightarrow \pi_1(Y, f(a))$ è un <u>isomorfismo</u>.

<u>Dim.:</u> Sia $g: Y \to X$ „inversa omotopica", cioè g è continua e $g \circ f$ è omotopa a Id_X, e $f \circ g$ è omotopa a Id_Y.

Abb.:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,a) \arrow[r, "f_*"] \arrow[rr, bend right, "g_* \circ f_* = (g \circ f)_*"'] & \pi_1(Y, f(a)) \arrow[r, "g_*"] \arrow[rr, bend left, "f_* \circ g_* = (f \circ g)_*"] & \pi_1(X, g(f(a))) \arrow[r, "f_*"] & \pi_1(Y, f(g(f(a))))
\end{tikzcd}$$

Per il corollario, gli omomorfismi $(g \circ f)_*$ e $(f \circ g)_*$ sono isomorfismi.

Cioè abbiamo quattro gruppi $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \xrightarrow{\eta} D$ e omomorfismi φ, ψ, η tali che $\psi \circ \varphi$ e $\eta \circ \psi$ sono isomorfismi. Come in un esercizio dei fogli sett., allora sono <u>tutti</u> isomorfismi. $\square$

<u>Oss.</u>: Ricordiamo: se $Y \subseteq X$ è retratto per def. dello sp. top. X, allora l'inclusione $\iota : Y \to X$ è un'equivalenza omotopica. Il teorema allora implica che ι_* è un isom. di gruppi, cosa che avevamo già dimostrato direttamente.

Teorema di Seifert - Van Kampen

<u>Esempio</u>: Calcoleremo il gruppo fondam. di S^n con $n \geq 2$: vedremo che $\pi_1(S^n) =$ banale

Intuitivamente:

$n = 2$

Se abbiamo $[\alpha] \in \pi_1(S^2, a)$ con $\alpha([0,1]) \subsetneq S^2$, allora possiamo scegliere $b \in S^2 \setminus \alpha([0,1])$ e allora α è tutto contenuto in $S^2 \setminus \{b\}$ che è omeomorfo a

$\mathbb{R}^2$, contraibile. Allora sicuramente $\alpha \sim 1_a$, cioè $[\alpha] =$ elem. neutro. Questo ragionamento però non si può applicare a cammini $[0,1] \longrightarrow S^2$ <u>suriettivi</u> (esistono!).

Useremo allora:

Teorema (prima parte del teo. di Seifert-Van Kampen):

Sia X spazio topologico, siano $A, B \subseteq X$ aperti, con $A \cup B = X$ e $A \cap B \neq \emptyset$. Scegliamo $a \in A \cap B$, e consideriamo $f: A \to X$ e $g: B \to X$ le inclusioni, e gli omomorfismi

$$f_*: \pi_1(A,a) \longrightarrow \pi_1(X,a) \quad e \quad g_*: \pi_1(B,a) \to \pi_1(X,a)$$

Se A, B, $A \cap B$ sono connessi per archi, allora le immagini $f_*(\pi_1(A,a))$ e $g_*(\pi_1(B,a))$ <u>generano</u> $\pi_1(X,a)$.

<u>Es.</u>: Si potrebbe tentare di usare il teorema per calcolare $\pi_1(S^1)$, ad es usando $A = S^1 \setminus \{(0,1)\}$ e $B = S^1 \setminus \{(0,-1)\}$, allora $\pi_1(A)$ e $\pi_1(B)$ sono banali. Ma $A \cap B$ non è connesso per archi.

Per la dim., usiamo:

<u>Teorema</u> (del numero di Lebesgue): Sia (Y, d) uno spazio metrico compatto e $f: Y \to X$ continua, con X spazio topologico. Sia $\mathcal{R}$ ricoprimento aperto di X, allora esiste $\delta > 0$ tale che $\forall y \in Y \ \exists A \in \mathcal{R} \mid f(B(y, \delta)) \subseteq A$.

<u>Dim.:</u> Sapp. che $f(Y)$ è compatto e quindi esiste un numero finito di elem. $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{R}$ tali che

$$f(Y) \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_m.$$

Consid. $g: Y \longrightarrow \mathbb{R}$

$$y \longmapsto \max\{d(y, Y \setminus f^{-1}(A_1)), \dots \dots d(y, Y \setminus f^{-1}(A_m))\}.$$

Abb.: g è continua, inoltre $g(y) \neq 0 \ \forall y \in Y$

perché se per assurdo avessi $g(y) = 0$ allora y apparterrebbe al chiuso $Y \setminus f^{-1}(A_i) \ \forall i$, e allora avrei $f(y) \notin A_i \ \forall i$, assurdo.

D'altronde g ha un minimo su Y per compattezza e sia

$$\delta = \min_{y \in Y} g(y) \quad .$$

Allora per ogni $y \in Y$ abb. $g(y) \geq \delta$, cioè esiste i tale che $d(y, Y \setminus f^{-1}(A_i)) \geq \delta$. Segue che $B(y, \delta)$ è contenuta in $f^{-1}(A_i)$, cioè $f(B(y,\delta)) \subseteq A_i$.

$\square$

Corollario: Sia $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ continua con X sp topologico. Sia $\mathcal{R}$ ricoprim. aperto di X, allora esiste $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tale che $\forall i \in \{0, .., n-1\}$ $\exists A_i \in \mathcal{R}$ tale che $\alpha\left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]\right) \subseteq A_i$.

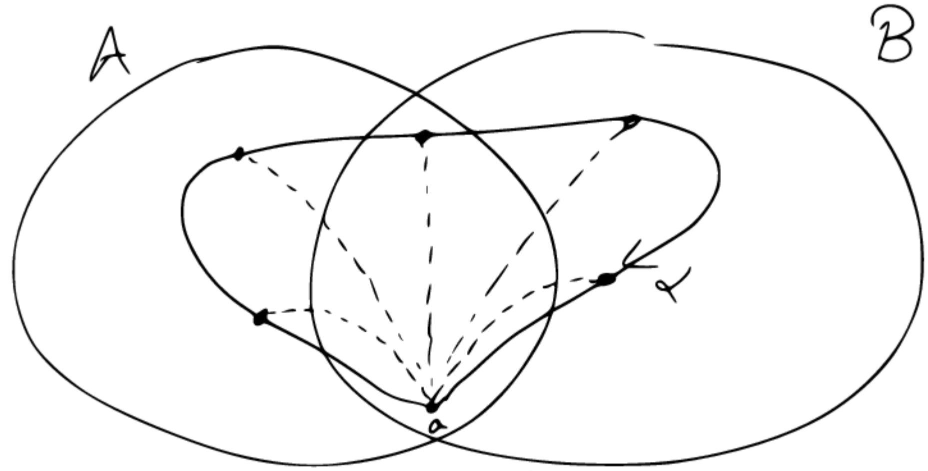
Dim.: Usiamo il teo. del numero di Lebesgue con $Y = [0,1]$, sia δ come nel teorema, e n tale che $\frac{1}{n} < \delta$. Allora

$$\alpha\left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]\right) \subseteq \alpha\left(B\left(\frac{i}{n} + \frac{1}{2n}, \delta\right)\right) \underset{\text{per il teorema}}{\subseteq} A_i$$

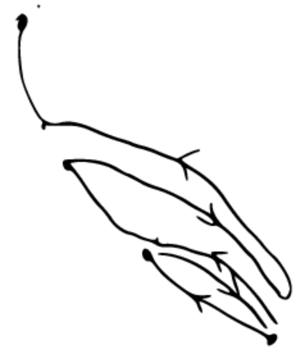
$\square$

Dim. del teorema di S.-V.K.

Idea:



cammino omotopo ad α:



Sia $\alpha \in \Omega(X, a, a)$, dimostriamo che esistono

$\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ tali che $\alpha \sim \gamma_1 * \ldots * \gamma_n$ e

$$\gamma_i \in \begin{cases} \Omega(A, a, a) & \text{opp.} \\ \Omega(B, a, a) \end{cases}$$

Sia n come nel corollario, cioè tale che

$$\alpha\left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]\right) \subseteq \begin{cases} A & \text{opp.} \\ B \end{cases} \qquad \forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$$

Denotiamo $x_i = \alpha\left(\frac{i}{n}\right) \qquad \left(x_0 = a, \quad x_1 = \alpha\left(\frac{1}{n}\right), \ldots\right)$, e definiamo $\alpha_i : [0,1] \to X$ come

$\alpha_i(t) = \alpha\left(\frac{i-1+t}{n}\right)$ cioè α_i percorre il tratto di α

che va da x_{i-1} a x_i.

Ora $\forall i$ scegliamo β_i un cammino da x_i a a, cioè $\beta_i \in \Omega(X, x_i, a)$, tale che:

1) Se $x_i \in A$ allora $\beta_i \in \Omega(A, x_i, a)$.
2) Se $x_i \in B$ allora $\beta_i \in \Omega(B, x_i, a)$.
3) Se $x_i \in A \cap B$ allora $\beta_i \in \Omega(A \cap B, x_i, a)$.

E' possibile perché $A \cap B$, A, B sono connessi per archi.

Consideriamo allora:

$$(\alpha_1 * \beta_1) * \left(i(\beta_1) * \alpha_2 * \beta_2\right) * \left(i(\beta_2) * \alpha_3 * \beta_3\right) * \dots * \left(i(\beta_{n-1}) * \alpha_n\right)$$

evidentemente è un cammino omotopo ad α. D'altronde ponendo

$$\gamma_1 = \alpha_1 * \beta_1, \quad \gamma_2 = \left(i(\beta_1) * \alpha_2 * \beta_2\right), \dots, \quad \gamma_n = \left(i(\beta_{n-1}) * \alpha_n\right)$$

abb. $\gamma_i \in \begin{cases} \Omega(A, a, a) & \text{opp.} \\ \Omega(B, a, a) \end{cases}$. Oss.: abbiamo usato effettivam.

che $A \cap B$ è connesso per archi, per essere sicuri che γ_i abbia questa proprietà.

Segue: ogni elem. di $\pi_1(X, a)$ è prodotto di elem. $[\gamma_1] \cdots [\gamma_n]$ tali che γ_i „viene" da A o da B, cioè $[\gamma_i] \in f_*(\pi_1(A, a))$ opp. $g_*(\pi_1(B, a))$.

$\square$

<u>Corollario</u>: Siano A, B come nel teorema di S.-V.K., e siano A, B semplicemente connessi. Allora X è semplicemente connesso.

<u>Dim.</u>: Se $\pi_1(A, a)$ e $\pi_1(B, a)$ sono banali allora lo è anche $\pi_1(X, a)$.

$\square$

<u>Corollario</u>: S^n è semplicem. conn. per $n \geq 2$.

<u>Dim.</u>: Usiamo il corollario con $S^n = A \cup B$ con $A = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ e $B = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\}$. Allora A e B sono omeomorfi a $\mathbb{R}^n$, quindi semplicemente connessi. Invece $A \cap B$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{pt\}$, che è connesso per archi se $n \geq 2$.

$\square$

Corollario: $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è semplicemente connesso $\forall n \geq 0$.

Dim.: v. foglio di esercizi settimanali. $\square$

Rivestimenti

Esempio:
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$
$$t \longmapsto (\cos(2\pi n t), \sin(2\pi n t))$$

Definizione: Sia $f: X \to Y$ appl continua fra spazi topologici. L'appl. f si dice <u>omeomorfismo</u> <u>locale</u> se $\forall x \in X$ $\exists U$ intorno aperto di x e V intorno aperto di $f(x)$ in Y tali che $f(U) = V$ e $f|_U : U \to V$ è un omeomorfismo.

Es.: 1) Ogni omeomorfismo è un omeom. locale.

2) $f: \mathbb{R} \to S^1$ di prima è un omeomorfismo locale, basta prendere come U un intervallo aperto più „corto" di 1, allora anche iniettivam. in S^1, e la sua immagine è aperta in S^1 e omeomorfa a U stesso (v. foglio di esercizi settimanali).

Oss.: Un omeom. locale non è necessariam. suriettivo, ma l'immagine deve essere aperta, perché V della def. è aperto in Y.

Lemma: Se $f: X \to Y$ è un omeomorfismo locale, allora f è aperta e le fibre sono tutte discrete.

Dim.: Sia $A \subseteq X$ aperto. Consideriamo gli aperti U della definizione, tutti insieme: chiamiamoli U_i con $i \in I$. Abb.:

$$A = \bigcup_{i \in I} (A \cap U_i)$$

Inoltre $A \cap U_i$ è aperto in U_i, quindi $f(A \cap U_i)$ è aperto in $f(U_i) = V_i$ che è aperto in Y. Allora

$$f(A) = \bigcup_{i \in I} \underbrace{f(A \cap U_i)}_{\text{aperti in } Y}, \qquad \text{quindi } f(A) \text{ è aperto in } Y.$$

Sia ora $y \in Y$, dimostriamo che $f^{-1}(y)$ ha topologia discreta, dimostrando che i suoi singoli punti sono aperti in $f^{-1}(y)$. Sia $x \in f^{-1}(y)$ e sia U come nella definizione. Allora $f(U) = V$ contiene y, e $f|_U : U \to V$ è biiettiva, per cui $f^{-1}(y) \cap U$ contiene solo x, e quindi $\{x\}$ è aperto in $f^{-1}(y)$.

$\square$

<u>Definizione</u>: Sia $p: E \to X$ un'applicazione continua fra spazi topologici. Supponiamo che $\forall x \in X$ esista un aperto $V \ni x$ tale che $p^{-1}(V)$ è unione disgiunta di aperti di E:

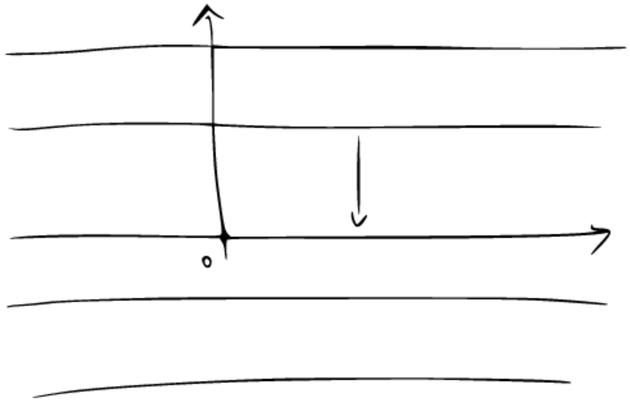
$p^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$ tali che $\forall i \in I : p|_{U_i} : U_i \to V$ è un omeomorfismo. In tal caso p si dice un <u>rivestimento</u>, lo spazio X si dice <u>base</u> (del rivestimento), lo spazio E si dice <u>spazio totale</u> (del rivestim.), e gli aperti V si dicono <u>aperti banalizzanti</u> (o <u>aperti ben rivestiti</u>).

Se E e X sono connessi allora p si dice <u>connesso</u>.

Se è possibile prendere $V = X$ allora p si dice <u>banale</u>.

<u>Esempi</u>: 1) Ogni omeomorfismo è un rivestimento banale.

2) $\mathbb{R} \times \mathbb{Z} = E$ $(\subseteq \mathbb{R}^2)$, $X = \mathbb{R}$, $p =$ proiezione sulla 1^a coordinata



p è un rivestimento banale

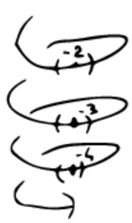
3) $f : \mathbb{R} \to S^1$ di prima è un rivestimento non banale

non è banale perché $\mathbb{R}$ non è unione di aperti ciascuno omeomorfo ad S^1 (ad es., perché S^1 è compatto e gli aperti non vuoti di $\mathbb{R}$ non lo sono).

4) Vediamo un omeom. locale che non è un rivestimento.

Sia $g :]-5, 5[\longrightarrow S^1$ la restrizione di f di prima.

E' facile vedere che è un omeom. locale, ma non è un rivestim. perché abb. $(1,0) = g(-4) = g(-3) = \dots = g(4)$



$\downarrow g$

dato $\varepsilon > 0$ piccolo, $g\big|_{]-\varepsilon,\varepsilon[} :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \underset{\text{l'immagine}}{\underset{\shortparallel}{V}}$

è un omeomorfismo, però

$$g^{-1}(V) = \underbrace{]-5,-5+\varepsilon[}\cup \dots \cup \underbrace{]5-\varepsilon, 5[}$$

questi vanno omeom su V tramite g

questi due sono omeomorfi a V, ma g <u>non</u> è omeomorfismo da $]-5,-5+\varepsilon[$ a V !

Quindi g non è un rivestimento.

<u>Proposizione</u>: Sia $p: E \to X$ rivestimento. Allora:

1) p è un omeomorfismo locale

2) se X è connesso, $\forall x, y \in X: \ |p^{-1}(x)| = |p^{-1}(y)|$.

<u>Dim</u> 1) Sia V aperto banalizzante in X, allora

$p|_{p^{-1}(V)} : p^{-1}(V) \to V$ è un omeom. locale, basta prendere per ogni $e \in p^{-1}(V)$ l'aperto U_i contenente e e avremo $p|_{U_i} : U_i \to V$ omeomorfismo. Visto che gli insiemi $p^{-1}(V)$ ricoprono E al variare di V, abb. p è omeomorfismo locale.

2) Sia $x_0 \in X$, scegliamo V aperto banalizzante contenente x_0, e scegliamo aperti $U_i \subseteq E$ tali che $p|_{U_i} : U_i \to V$ omeomorfismo, l'indice i varia in un insieme I_{x_0}.

Segue: $|p^{-1}(x_0)| = |I_{x_0}|$, allora tutti i punti di V hanno fibre con la stessa cardinalità.

Possiamo ripetere il ragionam. per ogni punto, e segue che
$A = \{ x \in X \mid |p^{-1}(x)| = |p^{-1}(x_0)| \}$ è aperto non vuoto in X.

Per lo stesso motivo, anche $X \setminus A$ è aperto. Segue: $A = X$ perché X è connesso.

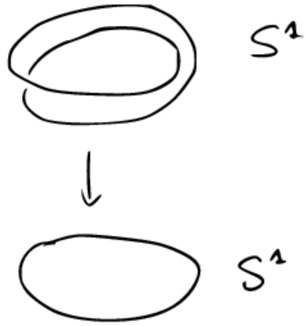
$\square$

Def.: Sia $p: E \to X$ rivestimento con X connesso. Se $|p^{-1}(x)|$ è finito $\forall x \in X$ (equivalentem. per un $x \in X$) allora poniamo $|p^{-1}(x)| = d$ e si dice che p ha **grado** d.

Es.: 1) $f: \mathbb{R} \to S^1$ di prima non ha grado finito

2) $S^1 \longrightarrow S^1$

$(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \longmapsto (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t))$ è ben



definita, la si può vedere anche come

$$\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\} \longrightarrow \{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$$
$$z \longmapsto z^2$$

è un rivestimento di grado 2.

Quozienti per azioni propriamente discontinue

Def.: Sia $G \subseteq Omeo(E)$ un sottogruppo di $Omeo(E)=\{f: E \to E$ omeomorfismo$\}$. Si dice che G agisce in modo propriamente discontinuo se $\forall e \in E\ \exists U$ intorno aperto di e in E tale che

$$g(U)\cap U=\emptyset \quad \forall g\in G, \text{ con } g\neq Id_E.$$

Esempi: 1) $\mathbb{Z}\cong G$ che agisce su $\mathbb{R}=E$ traslando per $n\in\mathbb{Z}$

cioè $f_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x+n$. Si tratta di un sottogruppo di $Omeo(\mathbb{R})$

E' un'azione propriam. discontinua, basta prendere per $r\in\mathbb{R}$ l'intorno $U = \left]r-\frac{1}{2}, r+\frac{1}{2}\right[$.

2) Sia $E=\mathbb{R}$ con $G=\{Id_{\mathbb{R}},\ s: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto -x\}$.

Non è un'azione propriam. discontinua, perché attorno a 0 non esiste alcun aperto U come nella definizione.

<u>Teorema:</u> Sia E spazio topologico, $G \subseteq \mathrm{Omeo}(E)$ che agisce in modo propriam. discontinuo. Il quoziente $p: E \to E/G$ è un rivestimento.

<u>Dim.:</u> Sappiamo che p è aperta. Sia $x \in E/G$, consid. U aperto come nella def. precedente tale che $p(U) \ni x$.

Sappiamo: $p(U) = V$ è aperto in X, e

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} g(U)$$

Oss.: se $g, h \in G$ sono distinti allora

$$g(U) \cap h(U) = h\Big(\underbrace{(h^{-1} \circ g)(U) \cap U}_{\substack{\uparrow \\ \text{vuoto perché } h \neq g}}\Big) = \emptyset$$

Cioè i $g(U)$ sono aperti di X, disgiunti due a due, e vale:

$$p|_U : U \to p(U) = V \qquad \text{è continua, aperta, biiettiva,}$$

cioè è un omeomorfismo. Allora anche

$p|_{g(U)} : g(U) \to V$ è un omeomorfismo, perché

$$p|_{g(U)} = p|_U \circ g^{-1}|_{g(U)} \qquad \left(g^{-1}|_{g(U)} : g(U) \to U \right)$$

è composizione di omeom. $\square$

Sezioni

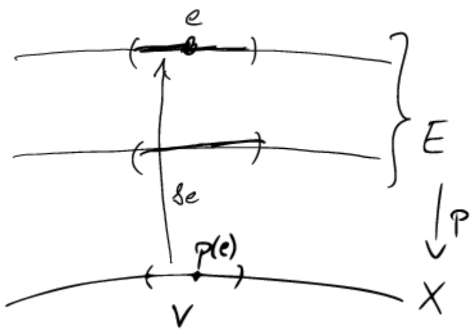
Data $f : X \to Y$ applicazione qualsiasi, una <u>sezione</u> di f è un'applicazione $s : Y \to X$ tale che $f \circ s = Id_Y$.

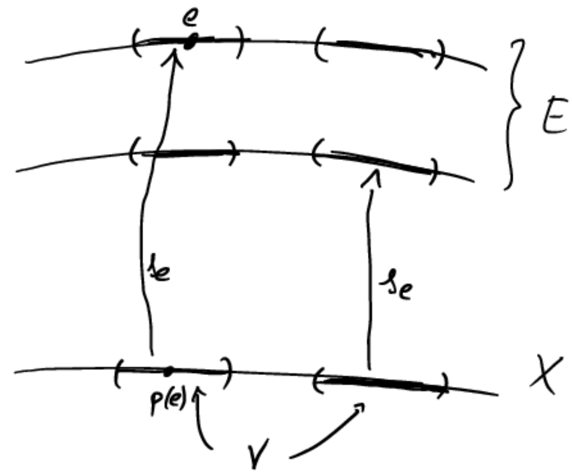
<u>Oss.</u>: In tal caso s è iniettiva.

<u>Es.</u>: Se X e Y sono spazi topologici e f è continua, allora potrebbe non avere sezioni continue. Ad es.

$f : \mathbb{R} \to S^1$ non ha sezioni continue, perché una sezione sarebbe un'appl. continua $s : S^1 \to \mathbb{R}$ iniettiva, e sappiamo che non esiste.

<u>Lemma</u>: Sia $p : E \to X$ un rivestimento, e sia $V \subseteq X$ un aperto banalizzante. Dato $e \in p^{-1}(V)$, esiste $s_e : V \to p^{-1}(V)$ sezione <u>continua</u> di $p|_{p^{-1}(V)} : p^{-1}(V) \to V$ tale che $s_e(p(e)) = e$.





Se V è connesso, allora una tale s_e è unica.

Dim: Scriviamo $p^{-1}(V)$ come unione di aperti disgiunti come nella def. di rivestimento. Sia U l'aperto fra questi contenente e, allora $p|_U : U \to V$ è un omeomorfismo. Basta porre $s_e = (p|_U)^{-1} : V \to U$ e considerarla come applicazione $V \longrightarrow p^{-1}(V)$. Quindi s_e esiste. Supponiamo V connesso, dim. che s_e è unica. Scriviamo

$$p^{-1}(V) = U \cup W$$

unione degli altri aperti della def. di rivestimento

Abb.: U è una componente connessa di $p^{-1}(V)$, è quella contenente e. Sia ora $s' : V \to p^{-1}(V)$ sezione continua tale che $s'(p(e)) = e$.

Allora $s'(V)$ è connesso e interseca U, quindi è contenuto in U.

Segue: s' è inversa destra di $p|_U : U \to V$, che è una biiezione, quindi $s' = s_e$. $\square$

Def.: Una s come nel lemma si chiama anche sezione *locale* di p.

Sollevamento di cammini e di omotopie

Def: Sia $p: E \to X$ un rivestimento, e siano Y uno spazio topologico e $f: Y \to X$ un'appl. continua. Un *sollevamento* di f è un'applicaz. continua $g: Y \to E$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

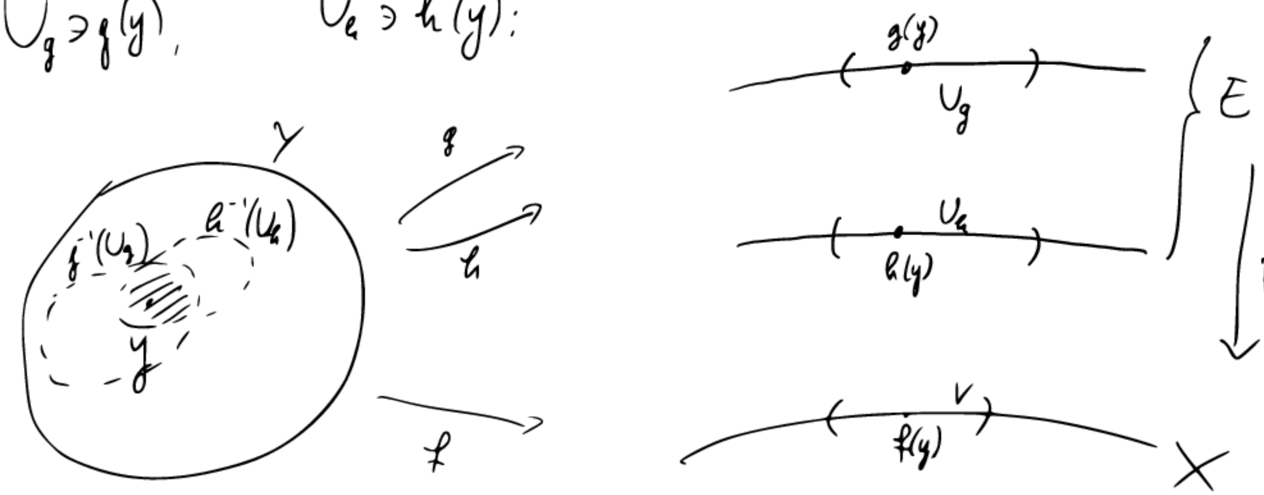
commuta, cioè $f = p \circ g$.

Teorema: Siano $p: E \to X$ un rivestimento, Y sp. topologico connesso, e $f: Y \to X$ continua. Siano g, h sollevamenti di f. Allora $g = h$ oppure $\forall y \in Y$: $g(y) \neq h(y)$.

Dim.: Consid. $A = \{ y \in Y \mid g(y) = h(y) \}$, dim. che A è aperto e chiuso.

Sia $y \in Y$, prendiamo $V \subseteq X$ aperto banalizzante in X contenente $f(y)$, e prendiamo $U_g, U_h \subseteq E$ aperti della def. di rivestimento tali che $p|_{U_g}: U_g \to V$ omeom. (lo stesso con U_h), e

$U_g \ni g(y)$, $\quad U_h \ni h(y)$:



Consid. $W = g^{-1}(U_g) \cap h^{-1}(U_h)$. E' un intorno aperto di y in Y.

Supponiamo $y \in A$, cioè $g(y) = h(y)$. Allora $U_g = U_h$, e allora $\forall w \in W$ abb. $g(w)$ e $h(w) \in U_g$. D'altronde $p(g(w)) = f(w) = p(h(w))$ e p è iniettiva su U_g, quindi $g(w) = h(w)$.

Supponiamo invece che $y \notin A$. Allora U_g e U_h sono disgiunti, e $\forall w \in W$ abb. $g(w) \in U_g$, $h(w) \in U_h$, quindi $g(w) \neq h(w)$.

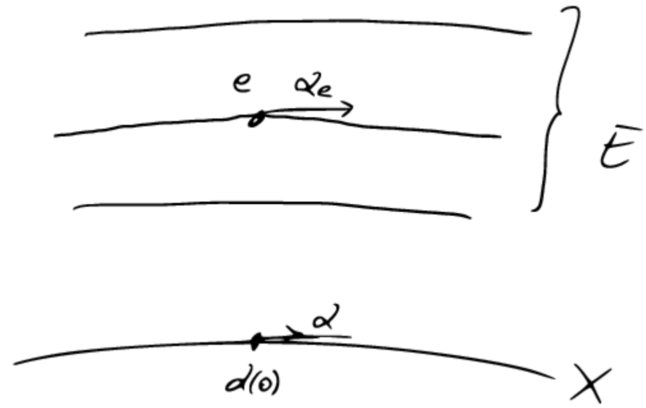
Cioè: nel primo caso $W \subseteq A$, nel secondo caso $W \subseteq Y \setminus A$.

Segue: A e $Y \setminus A$ sono entrambi intorni di ogni loro punto, cioè sono aperti. Visto che Y è connesso, allora $A = Y$ cioè $g = h$, oppure $A = \emptyset$ cioè $g(y) \neq h(y)$ $\forall y \in Y$. $\square$

<u>Corollario:</u> Sia $E \xrightarrow{p} X$ un rivestim. e $f: Y \to X$ come prima.

Dato $y \in Y$ e $e \in p^{-1}(f(y))$, esiste al più <u>un</u> sollevamento g di f tale che $g(y) = e$.

Teorema (sollevamento di cammini): Siano $p : E \to X$ un rivestimento, $\alpha : [0,1] \to X$ continua, sia $e \in E$ tale che $p(e) = \alpha(0)$. Allora esiste un unico sollevamento $\alpha_e : [0,1] \to E$ di α tale che $\alpha_e(0) = e$.



Dim.: L'unicità segue dall'ultimo corollario, dimostriamo che α_e esiste.

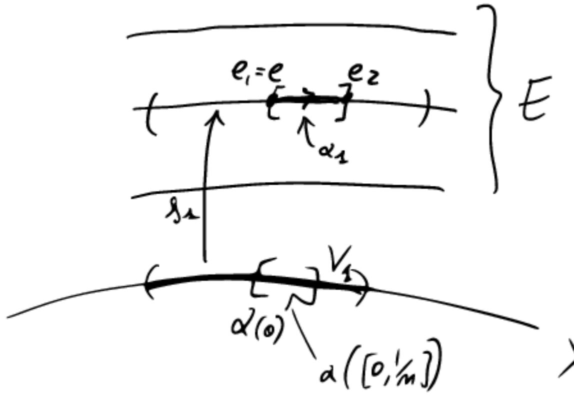
Consid. $\mathcal{R} = \{ V \mid V \subseteq X \text{ aperto banalizzante} \}$, è un ricoprimento aperto di X.

Per il Corollario al Teo. del numero di Lebesgue esiste $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ e aperti $V_1, \dots, V_m \in \mathcal{R}$ tali che

$$\alpha\left(\left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right]\right) \subseteq V_i \qquad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

Sia $s_1 : V_1 \to p^{-1}(V_1)$ sezione locale di p tale che $s_1(\alpha(0)) = e$, e definiamo

$$\alpha_1 : \left[0, \frac{1}{m}\right] \longrightarrow E \qquad \text{come} \qquad \alpha_1 = s_1 \circ \alpha$$



Poniamo anche $e_1 = e$, $e_2 = \alpha_1\left(\frac{1}{n}\right)$.

Continuiamo con $\alpha_2 : \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \longrightarrow E$ che solleva $\alpha\big|_{\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]}$ partendo da e_2, cioè scegliamo $s_2 : V_2 \to p^{-1}(V_2)$ sezione locale e poniamo $\alpha_2 = s_2 \circ \alpha$.

Proseguiamo fino ad $\alpha_n : \left[\frac{n-1}{n}, 1\right] \longrightarrow E$ che solleva $\alpha\big|_{\left[\frac{n-1}{n}, 1\right]}$.

Definiamo $\alpha_e : [0,1] \longrightarrow E$

$$t \longmapsto \begin{cases} \alpha_1(t) & \text{per } t \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ \alpha_2(t) & \text{per } t \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ \vdots \\ \alpha_n(t) & \text{per } t \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Otteniamo un cammino, cioè α_e è continua, e per costruzione $\alpha_e(0) = e$ e anche $p(\alpha_e(t)) = \alpha(t)$ $\forall t \in [0,1]$.

$\square$

Esempio: Consid. $\alpha : [0,1] \longrightarrow S^1$
$$t \longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

e il solito rivestimento $\mathbb{R} \xrightarrow{f} S^1$. Allora scegliamo un $e \in \mathbb{R}$ tale che $f(e) = (1,0) = \alpha(0)$. Ad es. $e = 0$.

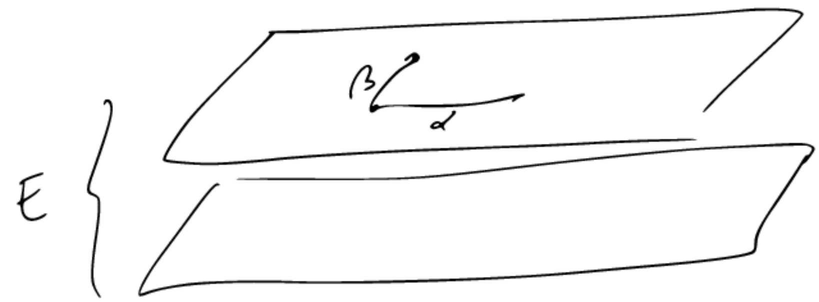
Allora $\alpha_e : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$$t \longmapsto t$$

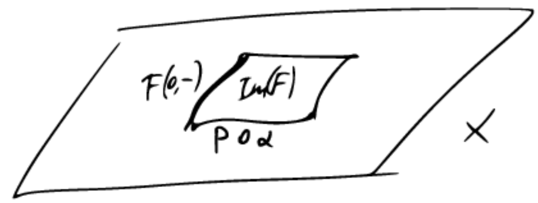
Preso invece $\beta : [0,1] \to S^1$ con $\beta(t) = (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t))$, il sollevamento con lo stesso $e=0$ è $\beta_e : [0,1] \to \mathbb{R}$
$$t \longmapsto 2t$$
.

Teorema (Sollevamento dell'omotopia di cammini) Siano $p : E \to X$ un rivestimento, $F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ continua, sia $\alpha : [0,1] \longrightarrow E$ continua tale che $p(\alpha(t)) = F(t,0)$ $\forall t \in [0,1]$. Allora esiste un unico sollevamento G di F tale che $G(t,0) = \alpha(t)$ $\forall t \in [0,1]$.

Dim.: L'unicità è già nota, dimostriamo l'esistenza di G.

Def. $\beta : [0,1] \longrightarrow E$ solleram. di $s \longmapsto F(0,s)$ tale che $\beta(0) = \alpha(0)$.





Incollando α e β ottengo un'applicazione g da $L =$
$= ([0,1]\times\{0\}) \cup (\{0\}\times[0,1])$ in E.

Dimostriamo che esiste un solleram. G di F coincidente con g su L.

Due casi:

1) Supponiamo $F([0,1]\times[0,1])$ contenuta in un aperto banalizzante V. Visto che L è connesso, esiste un unico aperto U della def. di rivestimento, tale che $g(L)\subseteq U$. Sia $s: V\to U$ la sezione locale, e basta definire

$$G = s\circ F.$$

2) Supponiamo che $F([0,1]\times[0,1])$ non sta contenuta in un aperto banalizzante.

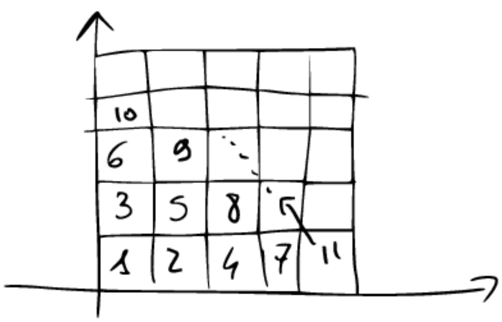
Per il teorema del numero di Lebesgue (lasciamo i dettagli per esercizio) possiamo suddividere $[0,1]\times[0,1]$ nei quadrati

$$Q_{ij} = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$$

con n tale che $F(Q_{ij})$ è contenuto in un aperto

banalizzante V_{ij} $\quad \forall i,j \in \{1,..,n\}$.

Solleviamo $F|_{Q_{ij}}$ nel modo seguente: ordiniamo $(\mathbb{Z}_{>0})^2$ così:



$(i,j) \leq (h,k) \iff i+j < h+k$

oppure

$i+j = h+k$

e $j \leq k$.

Per ogni Q_{ij} sollevo $F|_{Q_{ij}}$ usando il caso 1),

e questo definisce ricorsivamente il sollevamento

$$G_{(h,k)} : L \cup \bigcup_{(i,j)\leq(h,k)} Q_{ij} \longrightarrow E$$

Abb.: $G_{(n,n)} = G$ è il sollevamento voluto di F. $\square$

Teorema: Sia $p: E \to X$ rivestimento, $\alpha, \beta \in \Omega(X,a,b)$, $e \in E$ tale che $p(e) = a$. Siano α_e, β_e sollevamenti di α e β

rispettivam., tali che $\alpha_e(0) = \beta_e(0) = e$. Allora sono equivalenti:

(ric: $\sim$ = omotopia di cammini)

1) $\alpha \sim \beta$

2) $\alpha_e(1) = \beta_e(1)$ e $\alpha_e \sim \beta_e$.

Dim.: 2) $\Rightarrow$ 1) è semplice: se $\alpha_e(1) = \beta_e(1)$ e $\alpha_e \sim \beta_e$ tramite un'omotopia $F: [0,1] \times [0,1] \to E$, allora $\alpha \sim \beta$ tramite $p \circ F$ che è un'omotopia.

1) $\Rightarrow$ 2) Supponiamo $\alpha \sim \beta$ e sia $F: [0,1] \times [0,1] \to X$ un'omotopia di cammini da α a β.

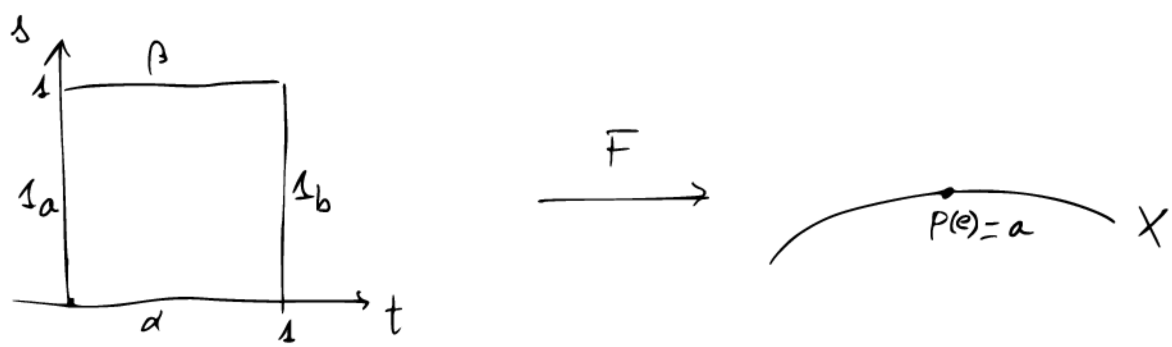


Abb. già sollevato α ad $\alpha_e: [0,1] \to E$. Per il teorema del solleram. dell'omotopia, esiste $G: [0,1] \times [0,1] \to E$ che solleva F e tale che $G(-,0) = \alpha_e(-)$.

(A): $G(0,-)$ è un sollevamento di $F(0,-)$, quindi è un sollevamento del cammino costante 1_a, solleram. che parte da $e \in E$. Anche il cammino costante 1_e in E è un solleram. con le stesse proprietà, e per l'unicità del solleram. dei cammini abb.

$$G(0,-) = 1_e .$$

(B): $G(-,1)$ è un solleram. di $F(-,1) = \beta$, e questo sollevamento parte da $G(0,1) = e$. Anche β_e è un solleram. che parte da e, quindi $G(-,1) = \beta_e$.

(C): $G(1,-)$ è solleram di $F(1,-) = 1_b$ e parte dal punto finale di α_e, cioè $\alpha_e(1)$. Anche $1_{\alpha_e(1)}$ solleva 1_b partendo da $\alpha_e(1)$, quindi $G(1,-) = 1_{\alpha_e(1)}$.

Da (B) e (C) segue che $\beta_e(1) = \alpha_e(1)$.

Da (A) e (C) segue che G è omotopia di <u>cammini</u> da α_e a β_e, quindi $\alpha_e \sim \beta_e$.

$\square$

<u>Corollario</u>: $\pi_1(S^1, (1,0)) \cong \mathbb{Z}$. Più precisamente, definiamo

$$\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(S^1, (1,0))$$
$$n \longmapsto [\alpha^{(n)}]$$

dove $\alpha^{(n)}(t) = (\cos(2\pi n t), \sin(2\pi n t))$

cioè $\alpha^{(n)}$ „gira" intorno alla circonferenza $|n|$ volte, in senso antiorario se $n>0$ e orario se $n<0$.

Allora φ è un isomorfismo di gruppi.

<u>Dim.:</u> Dim che φ è iniettivo e suriettivo.

<u>Iniettività</u>: sia $n \in \ker(\varphi)$, cioè tale che $\alpha^{(n)} \sim 1_{(1,0)}$.

Usiamo il solito rivestimento $f : \mathbb{R} \to S^1$, e solleviamo $\alpha^{(n)}$ a $(\alpha^{(n)})_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$. D'altronde noi sappiamo dare esplicitam. un sollevamento di $\alpha^{(n)}$ che parte da 0, e cioè

$$\begin{aligned}[0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}\\ t &\longmapsto nt\end{aligned}$$ quindi questo è $(\alpha^{(n)})_0$.

Dal teorema: $(\alpha^{(n)})_0(0) = (\alpha^{(n)})_0(1)$ e allora $n=0$.

<u>Suriettività</u>: Sia $\alpha \in \Omega(S^1, (1,0), (1,0))$ e dim. che $\alpha \sim \alpha_n$ per qualche n. Solleviamo α ad un cammino α_0 che parte da $0 \in \mathbb{R}$. Visto che α è un cammino chiuso, $\alpha_0(1)$ è tale che $f(\alpha_0(1)) = (1,0)$, cioè $\alpha_0(1) \in \mathbb{Z}$. Poniamo $\alpha_0(1) = n$, e consid. $\alpha^{(n)} \in \Omega(S^1, (1,0), (1,0))$.

Il sollevam. $(\alpha^{(n)})_0$ di $\alpha^{(n)}$ partendo da 0 ha gli stessi punti iniziale e finale di α_0. Visto che $\mathbb{R}$ è convesso, abb. $\alpha_0 \sim (\alpha^{(n)})_0$

Per il teorema abb $\alpha \sim \alpha^{(n)}$.

Rimane da dim. che φ è un omomorfismo di gruppi, cioè che $\varphi(n+m) = \varphi(n) \underset{\text{operaz. in } \pi_1(S^1)}{\cdot} \varphi(m)$. Siano allora $n, m \in \mathbb{Z}$,

abb. $\varphi(n+m) = [\alpha^{(n+m)}]$, e $\varphi(n) \cdot \varphi(m) = [\alpha^{(n)} * \alpha^{(m)}]$.

Usiamo il teorema per dim. che $\alpha^{(n+m)}$ e $\alpha^{(n)} * \alpha^{(m)}$ sono equival., quindi solleviamo $\alpha^{(n+m)}$ al cammino $\beta = (\alpha^{(n+m)})_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto (n+m)t$ da $0 \in \mathbb{R}$ a $n+m \in \mathbb{R}$. Solleviamo $\alpha^{(n)}$ al cammino $\gamma = \alpha_0^{(n)} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto nt$ da 0 a n, e solleviamo α^{m} al cammino $\delta = (\alpha^{(m)})_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto n + mt$ da $\underline{\underline{n}}$ a $n+m$. Oss.: esiste

la giunzione $\gamma * \delta$, cammino da 0 a $n+m$, e $\gamma * \delta$ solleva $\alpha^{(n)} * \alpha^{(m)}$ (verifica immediata). Ora β e $\gamma * \delta$ sono entrambi cammini in $\mathbb{R}$ da 0 al punto $n+m$, e sono equivalenti perché $\mathbb{R}$ è convesso. Dal teorema deduciamo $\alpha^{(n+m)} \sim \alpha^{(n)} * \alpha^{(m)}$, da cui φ è un omomorfismo.

$\square$

Teoremi di Borsuk e Brower

Esercizio: Sia $p: E \to X$ rivestimento, sia $f: S^2 \to X$ continua, sia $y \in S^2$ e $e \in E$ tale che $f(y) = p(e)$.

Dimostrare che esiste un unico sollevamento $g: S^2 \to E$ di f tale che $g(y) = e$.

(Suggerimento: usare il sollevam. dell'omotopia di cammini, esprimendo S^2 "in termini" del quadrato $[0,1]\times[0,1]$).

<u>Teorema</u> (Borsuk): Non esistono appl. continue $f: S^2 \to S^1$ tali che

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in S^2.$$

<u>Dim.</u>: Sia $f: S^2 \to S^1$ continua, consid. $p: \mathbb{R} \to S^1$ il solito rivestimento. Per l'esercizio, f si solleva a $g: S^2 \to \mathbb{R}$.

Sappiamo già che esiste $x_0 \in S^2$ tale che $g(x_0) = g(-x_0)$, e allora $f(x_0) = f(-x_0)$. Segue: $f(-x_0) \neq -f(x_0)$ (altrimenti avrei $f(x_0) = (0,0) \notin S^1$).

$\square$

<u>Corollario</u>: Ogni appl. continua $g: S^2 \to \mathbb{R}^2$ ammette un punto $x \in S^2$ tale che $g(x) = g(-x)$.

<u>Dim.</u>: Se per assurdo $g(x) \neq g(-x)$ $\forall x \in S^2$ allora è ben def. e continua l'applicazione $f: S^2 \to S^1$

$$x \longmapsto \frac{g(x) - g(-x)}{\| g(x) - g(-x) \|}$$

Questa f soddisfa $f(-x) = -f(x)$, contraddicendo il teorema di Borsuk. $\square$

<u>Corollario:</u> Sia $n \geq 3$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto. Data $f: A \to \mathbb{R}^2$ continua, f non è iniettiva. In particolare nessun aperto di $\mathbb{R}^n$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$, e $\mathbb{R}^n$ stesso non è omeom. a $\mathbb{R}^2$.

<u>Dim:</u> Sia $a \in A$, allora esiste $Y \subseteq A$ tale che Y è omeomorfo a S^2 (basta prendere un S^{n-1} dentro $B(a, \varepsilon) \subseteq A$ e intersecarlo con un sottosp. affine di dim. 3 contenente a).
Allora la restrizione $f|_Y : Y \to \mathbb{R}^2$ non è iniettiva per il corollario precedente. $\square$

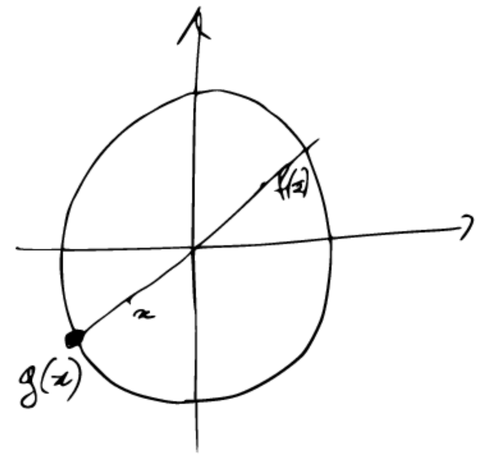
<u>Corollario</u> (di $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$): S^1 non è un retratto di $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

<u>Dim.:</u> Ricordiamo: se avessimo $r: D^2 \to S^1$ retrazione, allora

$$i_*: \pi_1(S^1, (1,0)) \to \pi_1(D^2, (1,0))$$

sarebbe iniettiva, dove $i: S^1 \to D^2$ è l'inclusione.
Visto che $\pi_1(S^1, (1,0))$ non è banale ma $\pi_1(D^2, (1,0))$ lo è (D^2 è convesso), questo è un assurdo. $\square$

Teorema (punto fisso di Brower): Ogni applicaz. continua $f: D^2 \to D^2$ ammette un punto fisso.



Dim.: Se per assurdo $x \neq f(x)\ \forall x \in D^2$, allora si può prendere il punto $g(x)$ di intersezione fra S^1 e la retta che contiene x e $f(x)$, quello „dalla parte" di x. (Esercizio: scrivere un'espressione esplicita di $g(x)$ e verificare che g è continua.)

Se $x \in S^1$ allora $g(x) = x$ per costruzione, cioè g sarebbe una retrazione di D^2 su S^1, assurdo. $\square$

Fibre di rivestimenti e gruppi fondamentali

Teorema: Sia $p: E \to X$ rivestimento, siano $e \in E$ e $x = p(e)$.

1) $p_*: \pi_1(E, e) \longrightarrow \pi_1(X, x)$

è iniettiva, e l'immagine $p_*(\pi_1(E, e))$ è fatta dagli elem. $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$ tali che il sollevamento α_e è un cammino chiuso.

2) Supp. E connesso per archi. Allora c'è una biiezione fra $p^{-1}(x)$ e $\pi_1(X,x) \big/ p_*(\pi_1(E,e))$ (l'insieme delle classi laterali destre), data associando alla classe di $[\alpha] \in \pi_1(X,x)$ il punto finale del solleram. α_e.

<u>Dim.</u>: 1) Sappiamo che p_* è omomorfismo di gruppi, sia $[\alpha] \in \pi_1(E,e)$ tale che $p_*([\alpha])$ sia banale, cioè $p \circ \alpha \sim 1_x$. D'altronde α solleva $p\circ\alpha$ partendo da e, e 1_e solleva 1_x partendo da e. Da un teorema precedente abb. $\alpha \sim 1_e$, cioè $[\alpha]$ banale. Segue: p_* iniettiva.

Dimostriamo l'uguaglianza fra gli insiemi:

$\subseteq$] Sia $[\alpha] \in p_*(\pi_1(E,e))$ cioè esiste $\beta \in \pi_1(E,e)$ tale che $[\alpha] = [p\circ\beta]$. Il cammino β solleva $p\circ\beta$ e finisce in $\beta(1) = e$, allora anche il solleram. α_e di α finisce in e.

$\supseteq$] Sia $[\alpha] \in \pi_1(X,x)$ tale che $\alpha_e(1) = e$, allora $\alpha_e \in \Omega(E,e,e)$ e $[\alpha] = [p\circ\alpha_e] = p_*([\alpha_e])$ quindi $[\alpha] \in p_*(\pi_1(E,e))$.

2) L'applicaz. è $p_*(\pi_1(E,e))\,[\alpha] \overset{\varphi}{\longmapsto} \alpha_e(1)$.

a) <u>E' ben definita</u>: dato $[\gamma] \in p_*(\pi_1(E,e))$, abb. $[\gamma]\cdot[\alpha] = [\gamma * \alpha]$. Il solleram. γ_e è chiuso (per la prima parte della dim.), quindi $\gamma_e * \alpha_e$ è definito, solleva $\gamma * \alpha$ partendo da e, e finisce in $\alpha_e(1)$, quindi φ è ben definita.

b) <u>E' iniettiva</u>: siano $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X,x)$ tali che $\alpha_e(1) = \beta_e(1)$. Allora $\alpha_e * i(\beta_e)$ è definito e finisce in e, cioè è chiuso. Solleva $\alpha * i(\beta)$, quindi $[\alpha]\cdot[\beta]^{-1}$

$$= [\alpha * i(\beta)] = [p\circ(\alpha_e * i(\beta_e))] = p_*([\alpha_e * i(\beta_e)]) \text{ è in } p_*(\pi_1(E,e)),$$

cioè $[\alpha]$ e $[\beta]$ sono nella stessa classe lat. destra.

c) <u>E' suriettiva</u>: sia $e' \in p^{-1}(x)$, scegliamo $\gamma \in \Omega(E, e, e')$, allora $p\circ\gamma = \alpha$ è un cammino chiuso in X, il cui solleram. α_e è γ e finisce in e'. Quindi φ manda la classe lat. destra di $[\alpha]$ in e', allora φ è suriettiva.

$\square$

<u>Corollario</u>: $\pi_1(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}, x) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \forall n \geq 2.$

<u>Dim.</u>: Abb. visto il rivestimento $p: S^n \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, e sappiamo che $|p^{-1}(x)| = 2$ per ogni $x \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ (v. esercizi settimanali).

Visto che $n \geq 2$, sappiamo che $\pi_1(S^n, e)$ è banale, e dal teorema (parte 2)) deduciamo $|\pi_1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}, x)| = 2$.

A meno di isomorfismo c'è un solo gruppo con due elementi, ed è $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. $\square$

<u>Oss.:</u> Pensando a $S^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, immaginiamo perché $\pi_1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}, x) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

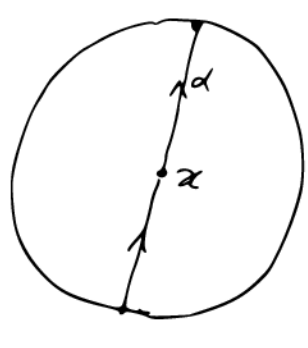
Se α è come in figura da e a $-e$, allora ovviamente $p \circ \alpha$ non è omotopo al cammino costante.

Però posso fare la giunzione di α con il „cammino antipodale", e ottengo un cammino chiuso in S^2 la cui immagine in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ è lo stesso cammino di $p \circ \alpha$ percorso due volte. In S^2 α è omotopo al cammino banale, quindi $2[p \circ \alpha] = [1_x]$.

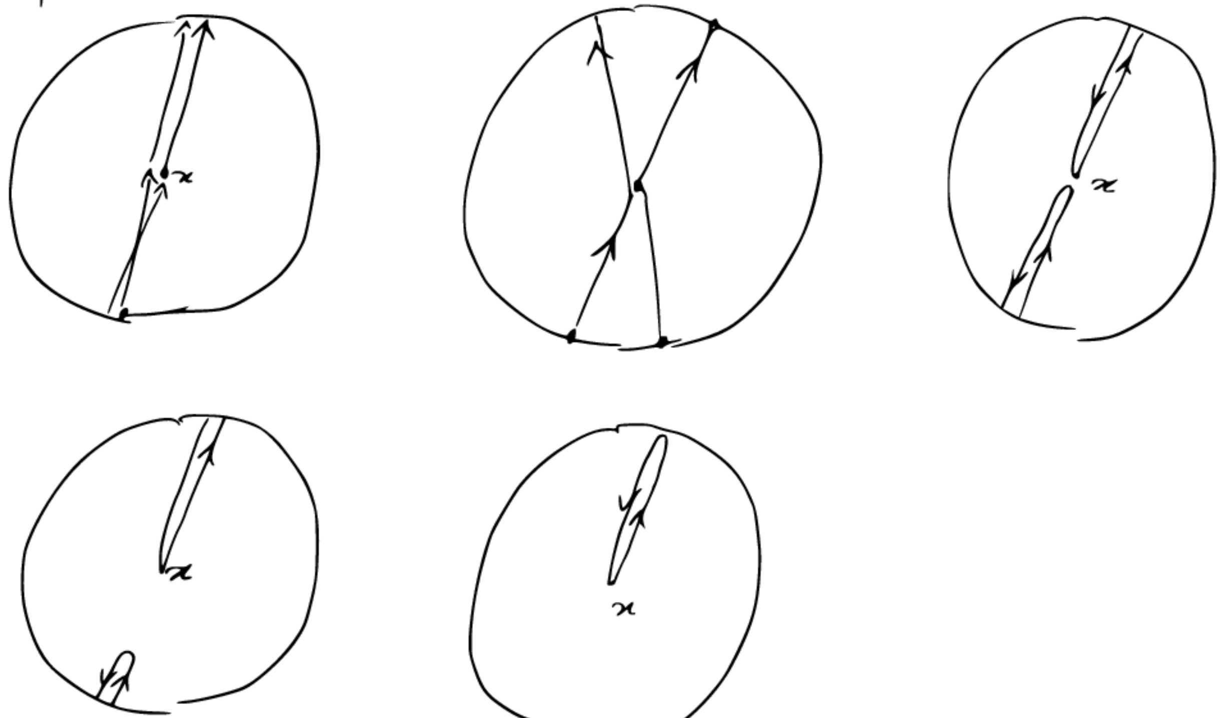
Si può vedere la cosa anche considerando solo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, vedendo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ come $D^2/\sim$ dove $\sim$ identifica x e $-x$

disco chiuso

per $x \in S^1 \, (\subseteq D^2)$ in $\mathbb{R}^2$.



percorrendo α due volte ho:



Azioni propriamente discontinue e gruppi fondamentali

Sia E spazio topologico e sia $G \subseteq Omeo(E)$ sottogruppo che agisce in modo propr. discontinuo. Allora $p: E \to E/G = X$ è un rivestimento.

Scegliamo $x \in X$ e un punto $e \in p^{-1}(x)$.

__Teorema:__ Sia $p: E \to E/G$ come sopra e supp. E conn. per archi. Consideriamo l'applicazione

$$\theta : \pi_1(X, x) \longrightarrow G$$

$$[\alpha] \longmapsto g$$

con $g \in G$ l'elemento tale che $g(e) = \alpha_e(1)$

Allora ϑ è ben definita ed è un omomorfismo suriettivo di gruppi. Inoltre il nucleo di ϑ è $p_*(\pi_1(E,e))$, cioè $G \cong \dfrac{\pi_1(X,x)}{p_*(\pi_1(E,e))}$ (in particolare, $p_*(\pi_1(E,e))$ è un sgr normale di $\pi_1(X,x)$).

Dim: L'applicaz. ϑ è ben definita, perché se $g, h \in G$ tali che $g(e) = h(e)$ allora $h^{-1}(g(e)) = e$. Visto che l'az. è propriam. discontinua, $h^{-1} \circ g = Id_E$ cioè $g = h$.

Verifichiamo che ϑ è omomorfismo di gruppi: Siano $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X,x)$.

Poniamo $\vartheta([\alpha]) = g$, $\vartheta([\beta]) = h$, cioè $g(e) = \alpha_e(1)$, $h(e) = \beta_e(1)$.

Il prodotto $[\alpha]\cdot[\beta]$ è $[\alpha * \beta]$, quindi

$\vartheta([\alpha][\beta]) = \vartheta([\alpha * \beta]) = k$

dove $k(e) = (\alpha * \beta)_e(1) = \beta_{\alpha_e(1)}(1) =$

$= \beta_{g(e)}(1) = g(\beta_e(1)) = g(h(e))$

Il sollevam. di $\alpha * \beta$ parte da e, arriva a $\alpha_e(1)$ e riparte da lì col sollevam di β che parte da $\alpha_e(1)$.

g manda e in $g(e)$, quindi manda tutto il cammino β_e nel cammino $\beta_{g(e)}$. Verifica: esercizio.

Con lo stesso argomento di prima deduciamo $k = g \circ h$, quindi ϑ_e è un omomorfismo.

Il nucleo di ϑ è $\{[\alpha] \in \pi_1(X,x) \mid \vartheta_e([\alpha]) = id_E\}$

ma $\vartheta([\alpha]) = id_E$ se e solo se $\alpha_e(1) = e$, cioè il nucleo

$\{[\alpha] \mid \alpha_e(1)=e\}$. Per il teorema precedente, questo è proprio $p_*(\pi_1(E,e))$.

Verifichiamo che ϑ è suriettivo: sia $g\in G$, consid. $g(e)=e'$ e un cammino $\gamma\in\Omega(E,e,e')$. Allora γ solleva $p\circ\gamma$, e abb. $[p\circ\gamma]\in\pi_1(X,x)$. Visto che $\gamma(1)=e'$ abb. $(p\circ\gamma)_e(1)=e'$.

Cioè $\vartheta([p\circ\gamma])=g$.

$\square$

<u>Corollario:</u> Se nel teorema abb. E sempliem. connesso, allora $G\cong\pi_1(X,x)$ tramite ϑ.

<u>Dim.</u> ovvia.

<u>Oss.:</u> Questo corollario viene usato per costruire, dato un gruppo G, uno spazio topologico X tale che $\pi_1(X,x)\cong G$.

<u>Sollevamenti di applicazioni qualsiasi</u>

Siano Y sp. topologico, $p: E\to X$ rivestimento, $f: Y\to X$ continua. Ci chiediamo sotto quali condizioni si può sollevare f:

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, "p"] \\
Y \arrow[ur, dashed, "\exists g ?"] \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

Consid gli omomorfismi fra i gruppi fondamentali, scelto $y_0 \in Y$, $x_0 = f(y_0) \in X$, ed $e_0 \in E$ tale che $p(e_0) = x_0$:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(E, e_0) \arrow[d, "p_*"] \\
\pi_1(Y, y_0) \arrow[r, "f_*"'] \arrow[ur, dashed, "g_*\ (?)"] & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

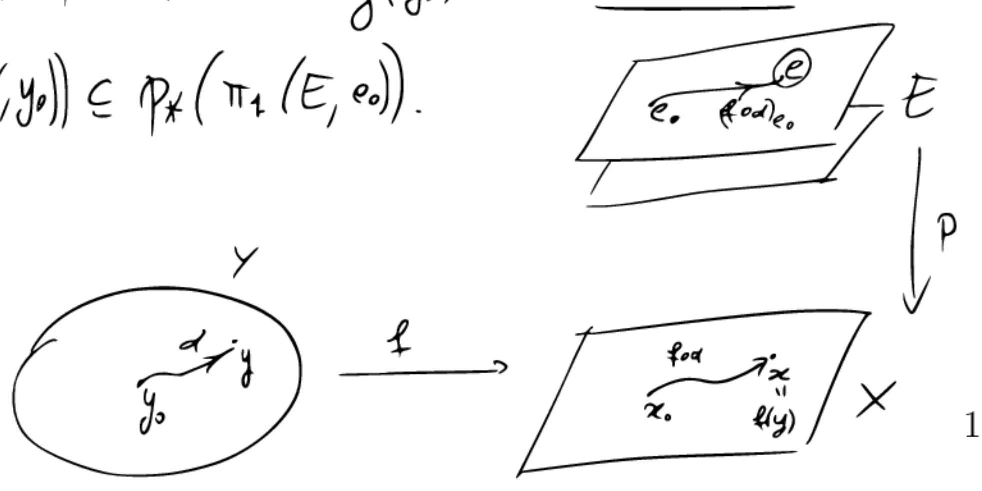
Se g esiste, allora $f_* = p_* \circ g_*$, e allora

$$\boxed{f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0))}$$

(sono due sgr di $\pi_1(X, x_0)$).

<u>Def.</u>: Uno spazio topologico si dice <u>*localmente connesso*</u> (risp. <u>*localm. connesso per archi*</u>) se ogni punto ha un sist. fondam. di intorni connessi (risp. connessi per archi).

<u>Teorema</u>: Sia Y connesso per archi e localmente connesso per archi, $p: E \to X$ rivestimento, e $f: Y \to X$ continua.
Scelti $y_0 \in Y$, $x_0 = f(y_0)$, $e_0 \in p^{-1}(x_0)$, esiste <u>unico</u> $g: Y \to E$ sollevam. di f tale che $g(y_0) = e_0$ <u>se e solo se</u> $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0))$.

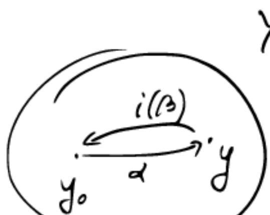


Dim.: $\Rightarrow]$ Già osservato

$\Leftarrow]$ Dato $y \in Y$, scegliamo $\alpha \in \Omega(Y, y_0, y)$, allora $f \circ \alpha \in \Omega(X, x_0, x = f(y))$, e solleviamo $f \circ \alpha$ partendo da e_0. Il suo punto finale sarà $g(y)$, cioè poniamo $g(y) = (f \circ \alpha)_{e_0}(1)$

Dim che g è ben definita ($g(y)$ non dip dalla scelta di α) e continua.

Sia $\beta \in \Omega(Y, y_0, y)$. Allora $\alpha * i(\beta) \in \Omega(Y, y_0, y_0)$,



e $f_*([\alpha * i(\beta)]) = [f \circ (\alpha * i(\beta))] \in \mathrm{Im}(f_*)$.

Per l'inclusione che stiamo assumendo $[f \circ (\alpha * i(\beta))] \in p_*(\pi_1(E, e_0))$.

Da questo segue $(f \circ (\alpha * i(\beta)))_{e_0}(1) = e_0$.

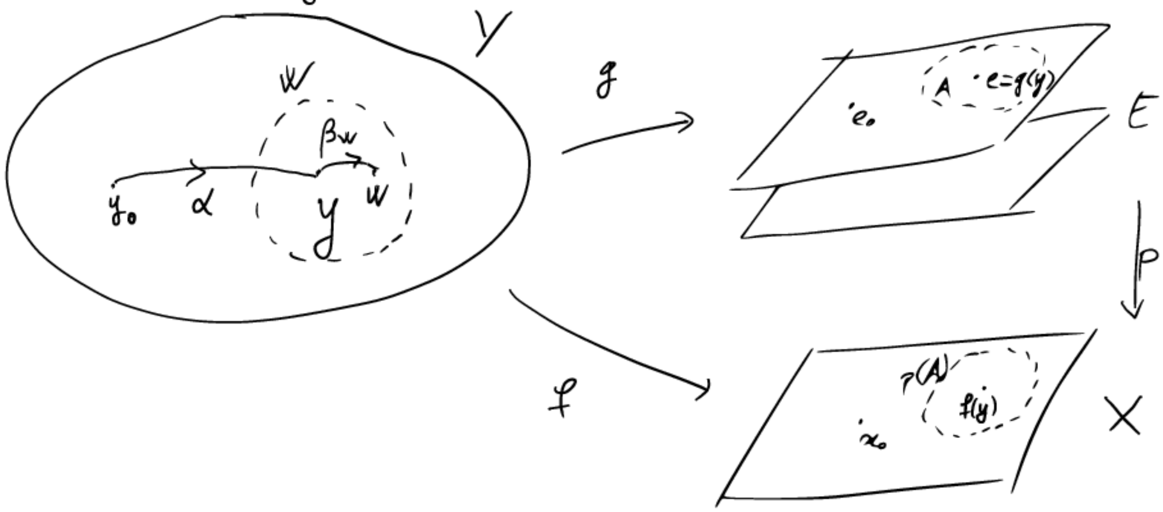
D'altronde $f \circ (\alpha * i(\beta)) = (f \circ \alpha) * (f \circ i(\beta))$, allora

$$(f \circ \alpha)_{e_0}(1) = \Big(\underbrace{(f \circ \alpha) * (f \circ i(\beta))}_{\substack{\text{il sollevam. di questo pezzo parte} \\ \text{da } e_0 \text{ e finisce in } e_0}} * (f \circ \beta) \Big)_{e_0}(1) = (f \circ \beta)_{e_0}(1)$$

quindi g è ben definita.

Per costruzione g solleva f, rimane da dim. che g è continua in y $\forall y \in Y$.

Consid. $g(y)$ e un intorno ap. $A \subseteq E$ di $g(y)$, troviamo un int. ap. W di y in Y tale che $g(W) \subseteq A$.



Possiamo assumere che A sia contenuto in uno degli ap. della def. di rivestimento, cioè $p|_A : A \to p(A)$ omeomorfismo, $p(A)$ aperto in X.

Scelgo W intorno di y in Y tale che W è connesso per archi, e tale che $f(W) \subseteq p(A)$. Allora vale $g(W) \subseteq A$, infatti per ogni $w \in W$ esiste un cammino $\beta_w \in \Omega(W, y, w)$. Se lo giuntiamo ad α di prima da y_0 a y otteniamo $\alpha * \beta_w$ da y_0 a w, e vale

$$g(w) = \left(f \circ (\alpha * \beta_w)\right)_{e_0}(1) =$$

$$= \Big(\underbrace{(f \circ \alpha)}_{\substack{\text{il solleram. qui}\\ \text{parte da } e_0 \text{ e}\\ \text{arriva a } g(y)}} * \underbrace{(f \circ \beta_w)}_{\substack{\text{qui solleviamo un}\\ \text{cammino tutto cont.}\\ \text{in } p(A)\text{, quindi}\\ \text{si usa } (p|_A)^{-1} \text{ e il}\\ \text{solleram. è cont. in } A}}\Big)_{e_0}(1) \in A.$$

Segue: g è continua. L'unicità di g l'abb. già vista nel teorema di unicità dei sollevamenti (due sollevam. coincidono dappertutto oppure in nessun punto). $\square$

Rivestimento universale e classificazione dei rivestimenti

Def.: Sia $p: E \to X$ un rivestimento.

Se E è semplicemente connesso, allora p si dice <u>rivestimento universale</u>.

Es.: 1) Il solito rivestim. $p: \mathbb{R} \to S^1$ è un riv. universale.

2) $id_{S^n}: S^n \to S^n$ è un rivestim. universale se $n \geq 2$.

3) $S^n \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è un rivestim. universale se $n \geq 2$.

Oss.: Non tutti gli spazi X hanno un rivestimento universale, sul libro di Manetti c'è una condiz. nec. e suff. per averlo.

Def.: Siano $p: E \to X$ e $p': E' \to X$ rivestimenti di X sp. top..

Un <u>isomorfismo di rivestimenti</u> fra p e p' è un omeomorfismo $f: E \to E'$ tale che $p = p' \circ f$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

<u>Esempio</u>: Consid. $p : \mathbb{R} \to S^1$ il solito rivestimento, allora

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x+1 \end{aligned}$$ è un isom. di rivestimento fra p e se stesso.

<u>Esempio</u>: Osserviamo: per ogni $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ c'è un sottogruppo $n\mathbb{Z}$ di $\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1)$.

Per ogni $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ c'è un rivestimento di S^1:

$n \neq 0$ | $n = 0$

$$p_n : S^1 \longrightarrow S^1$$

$$e^{2\pi i t} \xmapsto{p_n} e^{2\pi i n t}$$

cioè $z \longmapsto z^n$

vedendo $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

$$\begin{aligned} p_0 : \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto e^{2\pi i t} \end{aligned}$$

Calcoliamo $(p_n)_*(\pi_1(S^1))$: si tratta dei cammini chiusi in S^1 che <u>rimangono chiusi</u> se li solleviamo tramite p_n. Visto che p_n „avvolge" S^1 su se stessa n volte, un cammino ha quella proprietà se „percorre" S^1 0 volte, oppure n volte ($\Rightarrow$ quando lo sollevo, percorre S^1 una volta sola), oppure $2n$ volte ($\Rightarrow$ quando lo sollevo percorre S^1 due volte), ecc...

Cioè si verifica facilmente: $(p_n)_*(\pi_1(S^1)) = n\mathbb{Z}$.

Questo crea una corrispondenza fra i sottogruppi di $\pi_1(S^1)$ e i rivestimenti connessi di S^1. Questa corrispondenza vale per tutti gli sp. top. che hanno un rivestimento universale, ed è un analogo in topologia algebrica della <u>corrispondenza di Galois</u> per le estensioni di campi.

<u>Teorema:</u> Sia X sp. top. conn. per archi, localm. conn. per archi, e con un rivestimento universale. Fissiamo $x \in X$. C'è una biiezione

$$\left\{ (p, E, e) \;\middle|\; \begin{array}{c} p: E \to X \text{ rivestimento}, \\ (\text{con } E \text{ connesso per archi}) \end{array} \; e \in E \;\middle|\; p(e) = x \right\} \Big/ \sim$$

$$\Big\downarrow \Gamma$$

$$\left\{ \text{sottogruppi di } \pi_1(X, x) \right\}$$

dove: 1) $\sim$ è la relaz. di equivalenza per cui $(p, E, e) \sim (p', E', e')$ se c'è un isom. di rivestimenti $f: E \to E'$ tale che $f(e) = f(e')$

2) la biiezione Γ è ottenuta associando a (p, E, e) il sottogruppo $p_*(\pi_1(E, e))$.

Dim.: Γ ben def.: Siano $(p, E, e) \sim (p', E', e')$ tramite $f: E \to E'$, quindi $p = p' \circ f$, da cui $p_* = p'_* \circ f_*$, e da questo segue $p_*(\pi_1(E,e)) \subseteq p'_*(\pi_1(E',e'))$.

Usando f^{-1} si ottiene l'altra inclusione, quindi Γ è ben definita.

Γ iniettiva: Supponiamo che per (p, E, e) e (p', E', e') valga $p_*(\pi_1(E, e)) = p'_*(\pi_1(E', e'))$. Per il sollevam. di applicaz. qualsiasi, esiste un sollevamento f di p a E', e scambiando E con E' esiste un sollevam. f' di p' a E, con $f(e) = e'$ e $f'(e') = e$.

$$\begin{tikzcd} & E' \arrow[d, "p'"] \arrow[dl, dashed, bend right, "f'"'] \\ E \arrow[r, "p"'] \arrow[ur, dashed, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Abb.: $p = p' \circ f$ e $p' = p \circ f'$, da cui $p \circ (f' \circ f) = p' \circ f = p$.

Allora $f' \circ f: E \to E$ solleva $p: E \to X$ mandando e in e, e anche $id_E: E \to E$ solleva p mandando e in e.

Per l'unicità dei sollevamenti, $f' \circ f = id_E$, e analogam. $f \circ f' = id_{E'}$. Quindi f e $f' = f^{-1}$ sono omeom., e allora sono isom. di rivestimento, da cui $(p, E, e) \sim (p', E', e')$.

Segue: Γ iniettiva.

<u>Γ suriettiva:</u> Sia $H \subseteq \pi_1(X, x)$, fissiamo un riv. universale

$p_0 : E_0 \to X$ e scegliamo $e_0 \in E_0$ t.c. $p_0(e_0) = x$.

Per ogni $y \in E$ scegliamo un cammino $\alpha^y \in \Omega(E_0, e_0, y)$.

Definiamo una rel. d'equivalenza $\sim_H$ su E_0 nel modo seguente:

$$y_1 \sim_H y_2 \iff p_0(y_1) = p_0(y_2) \quad e \quad \left[(p_0 \circ \alpha^{y_1}) * i(p_0 \circ \alpha^{y_2})\right] \in H$$

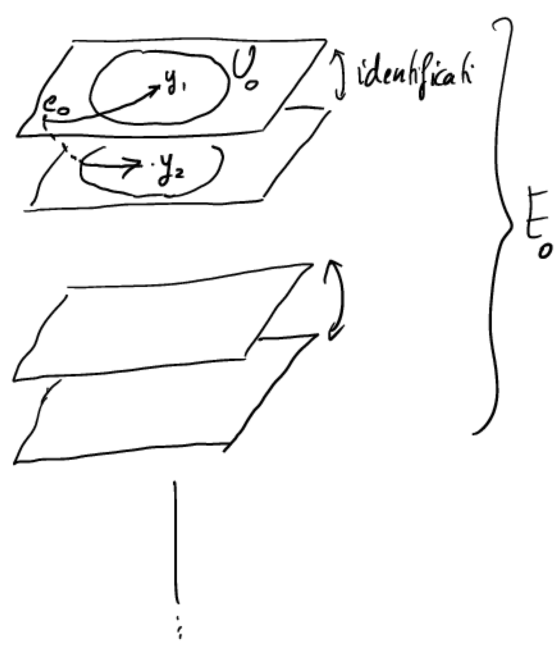
Oss.: se $p_0(y_1) = p_0(y_2)$ allora $p \circ \alpha^{y_1}$ e $p \circ \alpha^{y_2}$ vanno

entrambi da x a $p_0(y_1) = p_0(y_2)$, quindi $(p_0 \circ \alpha^{y_1}) * i(p_0 \circ \alpha^{y_2})$ è

definito. Questa rel. è ben definita, cioè non dip. dalla scelta dei cammini α^y, perché E_0 è semplicem. connesso quindi tutti i cammini da e_0 a y sono equivalenti (v. foglio di esercizi).

E' facile verif. che $\sim_H$ è una rel. d'equival. usando il

fatto che H è un sottogruppo.



Definiamo $E = E_0/_{\sim_H}$ e

$\pi : E_0 \to E$ il quoziente. Allora

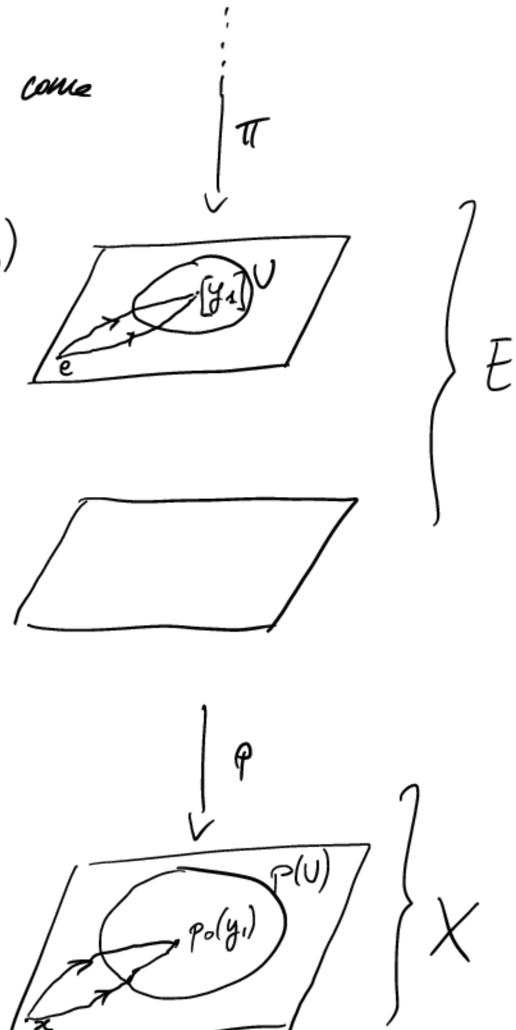
$p_0 : E_0 \to X$ passa al quoziente

ottenendo $p : E \to X$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ E_0 \arrow[ur, "\pi"] \arrow[r, "p_0"'] & X \end{tikzcd}$$

Sia $U_0 \subseteq E_0$ int. ap. di $y \in E_0$ come nella def. di riv., e sia $U = \pi(U_0)$.

Dimostriamo che $p|_U : U \to p(U) = p_0(U_0)$ è un omeomorfismo.



Osserviamo:

$$
\begin{tikzcd}
 & U \arrow[d, "p|_U"] \\
U_0 \arrow[ur, "\pi|_{U_0}"] \arrow[r, "p_0|_{U_0}"'] & p(U) = p_0(U_0)
\end{tikzcd}
$$

$p_0|_{U_0}$ è biiettiva e $\pi|_{U_0}$ è suriettiva: segue $p|_U$ biiettiva (e continua).

Dim. che $p|_U$ è aperta: sia $A \subseteq U$ aperto, allora

$p|_U(A) = p_0|_{U_0}\left((\pi|_{U_0})^{-1}(A)\right)$ è aperto in $p(U)$, quindi $p|_U$ è un omeomorfismo. Visto che $p^{-1}(p(U)) = p^{-1}(p_0(U_0))$ è unione disgiunta di aperti del tipo $\pi(U_0) = U$ come sopra, segue che $p : E \to X$ è un rivestimento.

Rimane da dim. che $p_*(\pi_1(E,e)) = H$. Dato $\gamma \in \Omega(E, e, e)$ dove $e = [e_0] \in E$, γ si solleva a un cammino da un punto di $p_0^{-1}(x)$ a un altro punto di $p_0^{-1}(x)$, e visto che proiettati su E sono uguali allora $p \circ \gamma$ è in H

per definizione di $\sim_H$. Quindi $p_*(\pi_1(E,e)) \subseteq H$. Viceversa, dato $[\delta] \in H$ con $\delta \in \Omega(X,x,x)$, il solleram. di δ a E_0 ha punto iniziale e finale equivalenti rispetto a $\sim_H$ per def. di $\sim_H$, quindi il solleram. di δ a E è un cammino chiuso, da cui $[\delta] \in p_*(E,e)$. Segue: $p_*(\pi_1(E,e)) = H$. $\square$

GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Varietà topologiche e differenziabili

Definizione: Sia X uno spazio topologico. Esso si dice varietà topologica di dimensione $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ se

1) X è di Hausdorff,
2) per ogni $x \in X$ esistono un intorno aperto U di p, un aperto $V \subseteq \mathbb{R}^n$, e un omeomorfismo $\varphi : U \to V$ detto carta locale,
3) X è 2°-numerabile.

Una collezione di triple (U, V, φ) tali che gli U ricoprono X si dice atlante di X.

Esempi: 1) $\mathbb{R}^n$ è una varietà topologica di dim. n.

2) S^n è una varietà topologica di dim. n. Prendiamo il seguente atlante:

$U_1 = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ $\quad$ $U_2 = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\}$

$V_1 = \mathbb{R}^n$ $\quad$ $V_2 = \mathbb{R}^n$

U_1

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 : U_1 \to V_1 \\ \varphi_2 : U_2 \to V_2 \end{array}\right\} \text{proiezioni stereografiche}$$

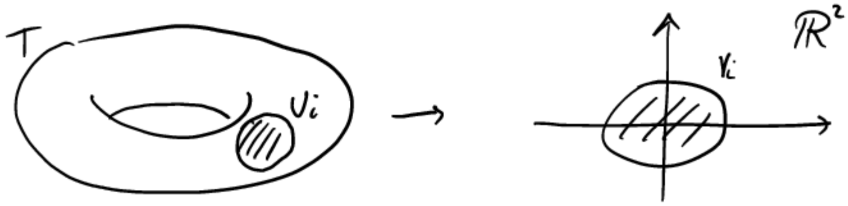
U_2

3) $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è una var. topol. di dim. n, basta prendere le carte locali

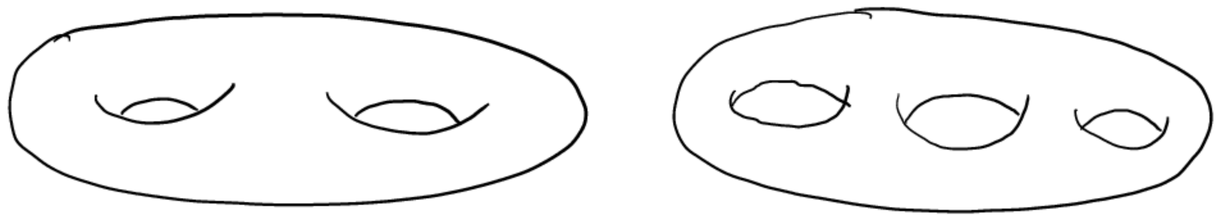
$$U_i = \left\{ [x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \;\middle|\; x_i \neq 0 \right\} \qquad V_i = \mathbb{R}^n$$

$$\varphi_i : U_i \longrightarrow V_i$$
$$[x_0, \dots, x_n] \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

4) $T = S^1 \times S^1 = \text{toro} =$  è una var. topol. di dim. 2



5) Sono varietà topologiche anche le „ciambelle con più buchi":



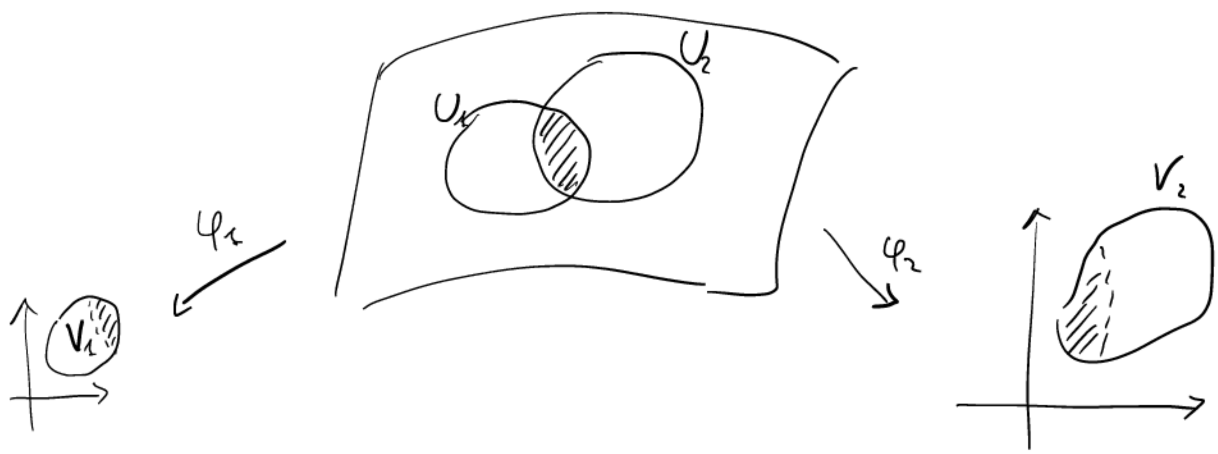
6) $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ sono varietà topologiche di dim. $2n$ (esercizio).

<u>Definizione:</u> Due atlanti $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ di una var. topologica X si dicono <u>compatibili</u> se $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ è ancora un atlante di X.

<u>Oss.:</u> Si verifica facilmente che la compatibilità degli atlanti è una relazione di equivalenza.

<u>Definizione:</u> Un atlante $\mathcal{A}$ di una var. topologica X si dice <u>di classe C^∞</u> se per ogni coppia (U_1, V_1, φ_1),

$(U_2, V_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}$, se $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ allora



$$\varphi_2 \circ \left(\varphi_1^{-1} \Big|_{\varphi_1(U_1 \cap U_2)} \right) : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) \quad \text{è } C^\infty.$$

<u>Esempio</u>: 1) Se una varietà top. ha un atlante $\mathcal{A}$ formato da una sola carta allora $\mathcal{A}$ è C^∞, perché $\varphi \circ \varphi^{-1} = Id_U$ è C^∞.

2) Gli esempi visti $\mathbb{R}^n$, S^n, $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, T, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ hanno tutti atlanti C^∞.

<u>Def.</u>: Una <u>varietà differenziabile</u> di dim. n è una varietà topologica di dim. n dotata di una classe di equivalenza di atlanti C^∞, dove qui la la relaz. d'equivalenza che si usa è $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ $\iff \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ è un atlante C^∞.

Esempio: Sia $X = \mathbb{R}$. Prendiamo $\mathcal{A}$ atlante di X formato dalla sola terna $(\underset{U_1}{\mathbb{R}}, \underset{V_1}{\mathbb{R}}, \underset{\varphi_1}{Id_{\mathbb{R}}})$.

$$\begin{tikzcd} & X = \mathbb{R} = U_1 = U_2 \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dr, "\varphi_2"] & \\ \mathbb{R} = V_1 & & \mathbb{R} = V_2 \end{tikzcd}$$

Anche $\mathcal{B} = \{(\underset{U_2}{\mathbb{R}}, \underset{V_2}{\mathbb{R}}, \underset{\varphi_2}{f})\}$ dove $f(x) = x^3$ è un atlante.

Ma $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ non è un atlante, perché $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = (x \mapsto \sqrt[3]{x})$ non è C^∞. Quindi $\mathbb{R}$ con l'atlante $\mathcal{A}$ (cioè scegliendo la classe di eq. dell'atlante $\mathcal{A}$) non è la stessa var. diff. di $\mathbb{R}$ con l'atlante $\mathcal{B}$. Però vedremo che sono <u>diffeomorfe</u> (v. dopo per la def.).

<u>Varietà differenziabili immerse in $\mathbb{R}^N$</u>

<u>Definizione</u>: Sia $X \subseteq \mathbb{R}^N$ sottosp. topologico ($N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$). E' detto <u>varietà differenziabile immersa di dimensione $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$</u> se $\forall p \in X$ $\exists U \subseteq X$ intorno aperto, $\exists V \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto, $\exists \psi : V \to U$ tali che

1) ψ è un omeomorfismo
2) ψ è differenziabile ($= C^\infty$) come appl. $V \to \mathbb{R}^N$
3) $\forall q \in V$: $d\psi_q$ è iniettivo.

componenti di ψ

[Ricordiamo: $d\psi_q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N$ è l'applicaz. lineare $v \mapsto \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial v}(p), \dots, \frac{\partial \psi_N}{\partial v}(p)\right)$
ed è rappresentata in coord. dalla <u>matrice</u> <u>Jacobiana</u> di ψ in q.]

Gli aperti U sono detti <u>aperti coordinati</u> e le appl. ψ sono dette <u>parametrizzazioni</u>.

<u>Esempi</u>: 1) $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ è una varietà differenziabile immersa in $\mathbb{R}^2$

$$\psi_1 : \underbrace{]0, 2\pi[}_{=V_1} \longrightarrow \mathrm{Im}(\psi_1) = S^1 \setminus \{(1,0)\} = U_1$$
$$t \longmapsto (\cos(t), \sin(t))$$

$$\psi_2 : \underbrace{]-\pi, \pi[}_{=V_2} \longrightarrow \mathrm{Im}(\psi_2) = S^1 \setminus \{(-1,0)\} = U_2$$
$$t \longmapsto (\cos(t), \sin(t))$$

Allora ψ_1, ψ_2 sono omeomorfismi C^∞, e

$$(J\psi_1)_t = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall t \quad \text{quindi } d(\psi_i)_t \text{ iniettiva } \forall t,\ \forall i$$

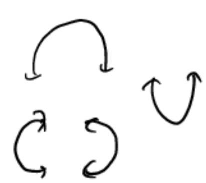
matrice Jacobiana

$$= (J\psi_2)_t$$

Ovviamente è possibile definire altre mappe, ad es.

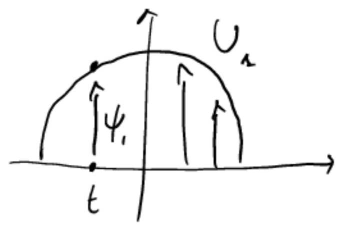
$U_1 = \{(a,b) \in S^1 \mid y > 0\}$ $\quad U_2 = \{\dots \mid y < 0\}$

$U_3 = \{\dots \mid x > 0\}$ $\quad U_4 = \{\dots \mid x < 0\}$



$$\psi_1 :]-1, 1[\to U_1 \qquad \psi_2 :]-1, 1[\to U_2$$
$$t \mapsto (t, \sqrt{1-t^2}) \qquad t \longmapsto (t, -\sqrt{1-t^2})$$

$$\psi_3 :]-1,1[\to U_3 \qquad\qquad \psi_4 :]-1,1[\to U_4$$
$$t \mapsto (\sqrt{1-t^2}, t) \qquad\qquad t \mapsto (-\sqrt{1-t^2}, t)$$



2) Come nella seconda parte dell'es. 1), se abbiamo

$f : V \to \mathbb{R}$ differenziabile, allora il suo grafico in $\mathbb{R}^N$

(V aperto di $\mathbb{R}^{N-1}$)

è una varietà differenziabile di dim. $N-1$, con parametriz.

$$\psi : V \to U = \mathrm{Im}(\psi) \subseteq \mathbb{R}^N$$
$$(x_1, \dots, x_{N-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{N-1}, f(x_1, \dots, x_{N-1}))$$

Infatti è un omeomorfismo (con inversa la proiez. sulle prime $n-1$ coordinate) e la matrice Jacobiana è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{N-1}} \end{pmatrix}$$

che ha rango massimo,

quindi $d\psi_q$ è iniettiva.

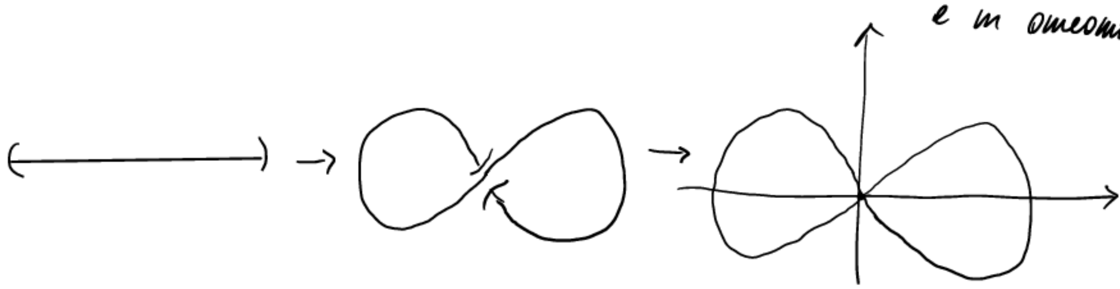
Questo tipo di parametrizzazioni sono dette <u>parametrizzazioni di Monge.</u>

<u>Esercizio:</u> Trovare mappe per $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ come sottovarietà immersa.

Esempio: Non è sufficiente richiedere che $\psi : V \to U$ sia C^∞, biiettiva, con diff. iniettivo: queste condizioni <u>non</u> implicano ψ^{-1} continua. Ad es.

$$\begin{aligned} \psi : \,]-\pi, \pi[\, &\longrightarrow \mathrm{Im}(\psi) \, (\subseteq \mathbb{R}^2) \\ t &\longmapsto (\sin(t), \sin(2t)) \end{aligned}$$

è biiettiva, C^∞, con differenziale iniettivo, ma non è un omeomorfismo:



Curve in $\mathbb{R}^n$

Definizione: Una <u>curva differenziabile parametrizzata</u> o semplicem. <u>curva</u> (in $\mathbb{R}^n$) è una funzione differenziabile ($= C^\infty$)

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{dove } I \subseteq \mathbb{R} \text{ è un intervallo aperto.}$$

Esempi: 1) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (una retta affine) $p, q \in \mathbb{R}^n$ fissati, $q \neq 0$

$$t \mapsto p + qt$$

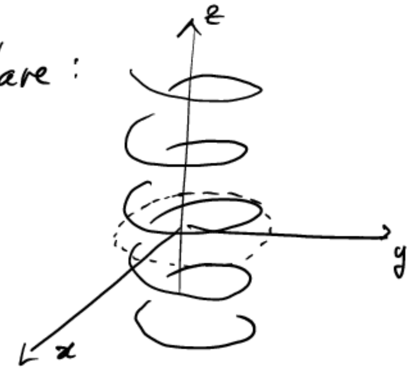
2) $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (la stessa retta, percorsa con una diversa parametrizzazione)

$$t \mapsto p + qt^3$$

3) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$t \mapsto (\lambda \cos(t), \lambda \sin(t), \mu t)$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ fissati

e' un'elica circolare:



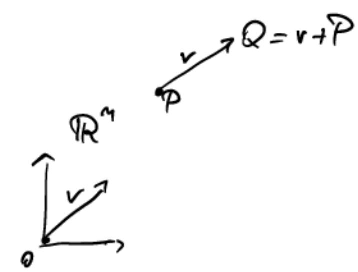
<u>Oss.</u> : Potremmo usare, invece che $\mathbb{R}^n$, uno <u>spazio euclideo</u> $\mathbb{E}$ qualsiasi;

e ricordiamo che dato $P \in \mathbb{E}$ punto

si considera $\vartheta_P : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n$

$Q \longmapsto v$

tale che $v = \overrightarrow{PQ}$ (= "il vettore da P a Q")



Tramite ϑ_P^{-1}, $\mathbb{E}$ acquisisce una struttura di spazio vettoriale

e si denota anche con $T_P\mathbb{E}$ (spazio tangente a $\mathbb{E}$ in p)

Per semplicità, nel corso considereremo solo $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$.

<u>Definizione</u>: Data una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, si dice

<u>vettore velocità</u> di α in $t \in I$ il vettore

$\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \dots, \alpha_n'(t))$, e si dice <u>velocità</u> di α in t

il numero $\|\alpha'(t)\|$.

La curva α si dice <u>regolare</u> se $\alpha'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$.

Oss.: Data una curva regolare $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, ogni $t \in I$ ha un intorno $V \subseteq I$ tale che $\alpha(V)$ è una sottovar. immersa. Vedremo i dettagli più avanti nel caso delle superfici.

Definizione: Una riparametrizzazione di α è una curva

$\beta: J \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\beta = \alpha \circ \vartheta$, dove

$\vartheta: J \longrightarrow I$ è una funzione C^∞ biiettiva

e tale che $\vartheta'(t) \neq 0 \quad \forall t$.

Se $\vartheta'(t) > 0 \quad \forall t$ allora β ha lo stesso verso di percorrenza di α, altrim. $\vartheta'(t) < 0 \ \forall t$ e β ha verso opposto.

Oss.: 1) Se β è una riparametrizzazione di α come sopra, allora α è una riparametrizz. di β, perché per il teo. della f.ne inversa sappiamo che ϑ è invertibile, ϑ^{-1} è C^∞, e $(\vartheta^{-1})'(t) \neq 0 \quad \forall t$.

2) Il vett. velocità di $\beta = \alpha \circ \vartheta$ è $\beta'(s) = \alpha'(\vartheta(s)) \cdot \vartheta'(s)$, e la velocità è $\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(\vartheta(s))\| \cdot |\vartheta'(s)|$.

In particolare abbiamo: α regolare $\Longleftrightarrow$ β regolare.

Esempio: $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$\qquad t \longmapsto (t, \cos(t))$ (percorre il grafico di $\cos(-)$)

$$\beta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto (t^3, \cos(t^3))$$

ha stessa immagine di α, ma <u>non è</u> una riparametrizz. di α perché $\vartheta(t) = t^3$ è C^∞ e biiettiva ma $\boxed{\vartheta'(0) = 0}$.

<u>Definizione:</u> Data $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ curva e $a, b \in I$ in I con $a < b$, si def. <u>lunghezza</u> di α fra a e b il numero

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt$$

$\left(\text{se invece } b > a \text{ spesso si prende anche } -\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_b^a \|\alpha'(t)\| dt \right)$

<u>Esempi:</u> 1) $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $\quad p, q \in \mathbb{R}^n$, $q \neq 0$

$$t \mapsto p + qt$$

$\alpha'(t) = v \quad \forall t$

lunghezza fra a e b: $\displaystyle\int_a^b \|v\| \, dt = (b-a)\|v\|$

2) $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto (r\cos(t), r\sin(t)) \quad \text{con } r > 0 \text{ fissato}$$

$\alpha'(t) = (-r\sin(t), r\cos(t)) \qquad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{r^2\sin^2(t) + r^2\cos^2(t)} = \sqrt{r^2} = r$

$a = 0$, $b > 0$: $\displaystyle\int_a^b r \, dt = rb$.

<u>Osservazione:</u> Se β è una riparametrizzazione di α con lo stesso verso come sopra, allora la lunghezza di β fra r e u è uguale alla lungh. di α fra $\theta(r)$ e $\theta(u)$, infatti:

$$\int_r^u \|\beta'(s)\| ds = \int_r^u \|\alpha'(\theta(s))\| \cdot \underbrace{|\theta'(s)|}_{>0} ds = \int_r^u \|\alpha'(\theta(s))\| \, \theta'(s) ds =$$

$$= \int_{\theta(r)}^{\theta(u)} \|\alpha'(t)\| dt$$

<u>Proposizione:</u> Sia $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ curva regolare. Esiste una riparametrizz. β di α tale che β ha velocità costante $=1$.

<u>Dimostrazione:</u> Fissiamo $t_0 \in I$ e def. $\varphi: I \to \mathbb{R}$ come

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(t)\| dt$$

. Allora $\varphi'(t) = \|\alpha'(t)\|$ ed è >0 $\forall t$ per ipotesi, inoltre φ è C^∞, e possiamo anche considerarla come appl. $\varphi: I \to J = \varphi(I)$. Così è anche biiettiva, e $\varphi^{-1} = \theta$ fornisce la riparam. desiderata, ponendo $\beta = \alpha \circ \theta$.

Infatti $\theta'(s) = \dfrac{1}{\varphi'(\theta(s))}$ $\forall s$, e

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(\theta(s))\| \cdot |\theta'(s)| = \frac{\|\alpha'(\theta(s))\|}{\|\alpha'(\theta(s))\|} = 1 \quad \forall s$$

$\square$

Definizione: Un campo di vettori su una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$

è un'applicazione differenziabile $v : I \to \mathbb{R}^n$

(qui $v(t)$ si intende come elem. di $T_{\alpha(t)}\mathbb{R}^n$ $\forall t$).

Dati campi vettoriali v, w su α, si definisce

la loro somma $v+w : I \to \mathbb{R}^n$, il prodotto
$$t \mapsto v(t)+w(t)$$

di v per una f.ne differenziabile $f : I \to \mathbb{R}$

come $f \cdot v : I \to \mathbb{R}^n$
$$t \mapsto f(t)\cdot v(t)$$

e anche il prodotto scalare $v \cdot w : I \to \mathbb{R}$.
$$t \mapsto v(t)\cdot w(t)$$

prod. scalare standard

Oss.: $v+w$, $f \cdot v$, $v \cdot w$ sono tutti diff., e

$(v\cdot w)'(t) = v'(t)\cdot w(t) + v(t)\cdot w'(t)$ (basta derivare le singole componenti).

Definizione: Un campo di basi (eventualm. ortogonali, ortonormali, ecc..)

su α è una n-upla di campi vettoriali $(v_1, .., v_n)$ su

α tali che $(v_1(t), .., v_n(t))$ è una base

(ortogonale, ortonormale, ecc...) per ogni t.

Formule di Frenet in $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$

Sia $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ curva a vel. unitaria. Definiamo

$$T: I \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto \alpha'(t)$$

E' un campo di vettori (di lungh. 1) su α. Per ogni t, definiamo $n(t) \in \mathbb{R}^2$ il vettore di lunghezza 1 tale che $(\alpha'(t), n(t))$ è una base ortonormale orientata positivamente, e il campo di vettori $N: I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto n(t)$.

Da $1 = \|\alpha'(t)\| = \alpha'(t) \cdot \alpha'(t)$ deduciamo

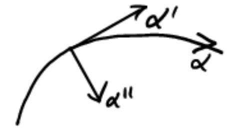
$0 = 2\alpha'(t) \cdot \alpha''(t)$ cioè $\alpha''(t)$ e $\alpha'(t)$ sono ortogonali $\forall t$. Segue: $\alpha''(t)$ è un multiplo scalare di $n(t)$ $\forall t$

<u>Definizione:</u> Sia $\kappa: I \to \mathbb{R}$ tale che $\alpha''(t) = \kappa(t)\, n(t)$ $\forall t$. Il numero $\kappa(t)$ si dice <u>curvatura</u> di α in t, e κ la <u>curvatura</u> di α.

<u>Esempio:</u> $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ $\alpha(t) = \left(r\cos\left(\frac{t}{r}\right), r\sin\left(\frac{t}{r}\right)\right)$ è la circonferenza (o un arco di circonferenza) di raggio $r>0$ percorsa a vel. unitaria. Vale $\kappa(t) = \frac{1}{r}$. Se prendiamo invece $\alpha(t) = \left(r\cos\left(\frac{-t}{r}\right), r\sin\left(\frac{-t}{r}\right)\right)$ (percorre in senso opposto) vale $\kappa(t) = -\frac{1}{r}$.

Oss.: $\kappa(t)$ può essere negativa: se è >0 allora $(\alpha'(t), \alpha''(t))$ è una base di $\mathbb{R}^2$ orientata positivam., se $\kappa(t)<0$ allora $(\alpha'(t), \alpha''(t))$ è orientata negativamente.

$\kappa > 0$



$\kappa < 0$

Proposizione (formule di Frenet in $\mathbb{R}^2$): Data α curva a velocità unitaria, valgono:

1) $T' = \kappa N$

2) $N' = -\kappa T$

(questo fornisce tutte le derivate del campo di basi (T, N))

Dim.: 1) è la def. di κ, dimostriamo 2): deriviamo $T \cdot N = 0$

ottenendo $N' \cdot T + N \cdot T' = 0$ ← (cioè la funzione nulla)

$$N' \cdot T = -N \cdot T' = -N \cdot \kappa N = -\kappa \underbrace{(N \cdot N)}_{\text{costante } = 1} = -\kappa$$

D'altronde la derivata di $1 = N \cdot N$

↖ cioè la funzione costante $= 1$

è $0 = 2N' \cdot N$, cioè N' è ortogonale a N.

Concludiamo che N' è proporzionale a T, e $-\kappa$ è il coeff. di proporzionalità.

$\square$

Passiamo ora alle formule per $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$

(si possono anche generalizz. a curve in $\mathbb{R}^n$).

Supponiamo che
- α sia a velocità unitaria
- $\underline{\alpha''(t) \neq 0} \quad \forall t$.

Definizione: Poniamo $\underset{\text{curvatura di } \alpha \text{ in } t}{\kappa(t)} = \|\alpha''(t)\|$ e $n(t) = \dfrac{\alpha''(t)}{\kappa(t)}$

$\forall t \in I$. Def. inoltre

$b(t) = \alpha'(t) \wedge n(t)$.

prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$

Definiamo i campi vettoriali T, N, B rispettivam. come $t \mapsto \alpha'(t)$, $t \mapsto n(t)$, $t \mapsto b(t)$.

Oss.: 1) $n(t)$ e $b(t)$ hanno norma 1 $\forall t$, e (T, N, B) è un campo di basi ortonormali orientate positivamente.

2) In $\mathbb{R}^3$ la curvatura non è mai negativa. Questo corrisponde al fatto che non avrebbe senso chiedersi se $(\alpha'(t), \alpha''(t))$ è orientata positivamente: non è una base di $\mathbb{R}^3$.

C'è anche un analogo della curvatura, ma che coinvolge N' e B' invece che T' e N. Per introdurlo, deriviamo $B \cdot T = 0$, ottenendo

$$B' \cdot T + \underbrace{B \cdot T'}_{=0} = 0$$

cioè B' è sempre ortogonale ad T. Derivando invece $B \cdot B = 1$ otteniamo

$2 B \cdot B' = 0$, cioè B' è sempre ortogonale anche a B.

Allora $b'(t)$ è un multiplo scalare di $n(t)$ $\forall t$.

<u>Definizione</u>: Sia $\tau(t) \in \mathbb{R}$ tale che $b'(t) = -\tau(t) n(t)$ $\forall t$. Il numero $\tau(t)$ è detto <u>torsione</u> di α in t, e $\tau : I \to \mathbb{R}$ la <u>torsione</u> di α.

<u>Proposizione</u> (formule di Frenet in $\mathbb{R}^3$): Data $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ curva a velocità unitaria con $\alpha''(t) \neq 0$ $\forall t$, valgono:

$$\begin{aligned} &1)\ T' = \kappa N \\ &2)\ N' = -\kappa T + \tau B \\ &3)\ B' = -\tau N \end{aligned}$$

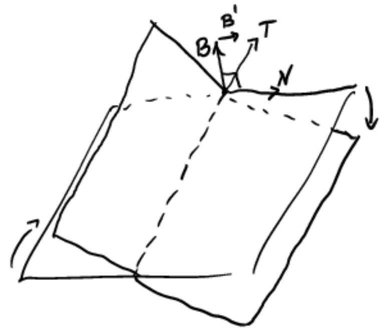
<u>Dim.</u>: Va dimostrata solo 2), e per essa basta derivare
$N \cdot T = 0$, $N \cdot N = 1$, $N \cdot B = 0$ (dettagli: esercizio). $\square$

Il dato di T, N, B, κ, τ si dice anche <u>apparato di Frenet</u>. Il piano affine $\alpha(t) + \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\alpha'(t), n(t)\}$ è detto <u>piano osculatore affine</u> di α in t, ed è il piano „più vicino" a contenere α in un intorno di t.

Più precisamente, supp. per semplicità $0 \in I$. Allora si calcola facilmente che

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \alpha'(0)t + n(0)\kappa(0)\frac{t^2}{2} + (\ldots)$$

cioè "a meno di t^3 e potenze superiori" $\alpha(t)$ è contenuta nel piano osculatore affine. Inoltre B è normale al piano, per cui $B' = -\tau N$ esprime la torsione come la velocità con cui il piano osculatore cambia inclinazione (nell'unica direzione in cui può farlo, cioè N):



Curve congruenti

Sia $\Phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'isometria, cioè $\exists A \in O(3,\mathbb{R})$ (matrici ortogonali 3×3) e $c \in \mathbb{R}^3$ tali che $\Phi(v) = Av + c \quad \forall v \in \mathbb{R}^3$.

<u>Oss.</u>: Se v, w sono ortogonali e di norma 1, allora si verifica facilm. che

$$A(v \wedge w) = \det(A) \cdot (Av) \wedge (Aw). \qquad (\det(A) \in \{\pm 1\})$$

<u>Prop.</u>: Siano $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ curva, $\Phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ isometria, $\beta = \Phi \circ \alpha$. Valgono:

1) α è a velocità unitaria $\iff$ β è a velocità unitaria
2) $\alpha''(t) \neq 0 \iff \beta''(t) \neq 0$
3) supponendo α a vel. unit. e $\alpha''(t) \neq 0 \ \forall t$, valgono $\forall t$:

$$\beta'(t) = A\,\alpha'(t),$$
$$n_\beta(t) = A\,n_\alpha(t),$$
$$b_\beta(t) = \det(A)\cdot A\,b_\alpha(t),$$
$$\kappa_\beta(t) = \kappa_\alpha(t),$$
$$\tau_\beta(t) = \det(A)\cdot\tau_\alpha(t).$$

Dim.: Esercizio.

Definizione: Se α e β sono come nella proposiz. precedente allora si dicono congruenti. Se Φ è una traslazione, allora α e β si dicono parallele.

Teorema: Siano $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ curve a vel. unitaria tali che $\alpha''(t) \neq 0 \neq \beta''(t)$ $\forall t$. Allora α e β sono congruenti se e solo se

$$\kappa_\alpha = \kappa_\beta \quad \text{e} \quad \tau_\alpha = \pm\tau_\beta$$

(come funzioni $I \to \mathbb{R}$, cioè $\tau_\alpha(t) = \tau_\beta(t)$ $\forall t$ opp. $\tau_\alpha(t) = -\tau_\beta(t)$ $\forall t$)

Per la dimostrazione:

Lemma: Siano $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ curve. Se $\alpha'(t) = \beta'(t)$ $\forall t$ allora α e β sono parallele, e se inoltre $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ per un $t_0 \in I$ allora $\alpha = \beta$.

Dim. lemma: Basta porre $F(t) = \alpha(t) - \beta(t)$ e calcolare $F'(t)$. $\square$

Dim. teorema: $\Rightarrow$) Segue dalla prop. precedente.

$\Leftarrow$) Fissiamo $t_0 \in I$ e i riferim. affini

$$\mathcal{R} = (\alpha(t_0); \alpha'(t_0), n_\alpha(t_0), b_\alpha(t_0))$$

$$\mathcal{R}' = (\beta(t_0); \beta'(t_0), n_\beta(t_0), \pm b_\beta(t_0))$$

stessa scelta di $\tau_\alpha = \pm \tau_\beta$

e sia $\Phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che porta $\mathcal{R}$ in $\mathcal{R}'$

$\Big(\Phi(v) = Av + c$ dove $c = \beta(t_0) - A\alpha(t_0)$ e

$A\alpha'(t_0) = \beta'(t_0)$, $An_\alpha(t_0) = n_\beta(t_0)$, $Ab_\alpha(t_0) = \pm b_\beta(t_0) \Big)$.

Poniamo $\gamma = \Phi \circ \alpha$ e dim. $\beta = \gamma$. Usiamo il lemma, facendo vedere che $\gamma(t_0) = \beta(t_0)$ (ovvio) e $\gamma'(t) = \beta'(t)$ $\forall t$.

Consideriamo

$$F(t) = \gamma'(t) \cdot \beta'(t) + n_\gamma(t) \cdot n_\beta(t) + b_\gamma(t) \cdot b_\beta(t).$$

Sono tutti vettori di norma 1, e segue: $F(t) \le 3$,

$F(t) = 3 \iff \gamma'(t) = \beta'(t)$, $n_\gamma(t) = n_\beta(t)$, $b_\gamma(t) = b_\beta(t)$.

Per costruzione $F(t_0) = 3$, e derivando $F(t)$ si ottiene

$F'(t) = (\dots) = 0$. Segue: $F(t) = 3$ $\forall t$, quindi

$\gamma'(t) = \beta'(t)$ $\forall t$.

$\square$

Classificazione delle curve in $\mathbb{R}^3$ tramite curvatura e torsione

Teorema: Siano $\kappa: I \to \mathbb{R}$ e $\tau: I \to \mathbb{R}$ funzioni C^∞ con $\kappa(t) > 0 \ \forall t \in I$. Per ogni "dato iniziale" di $p_0 \in \mathbb{R}^3$, (T_0, N_0, B_0) base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, e $t_0 \in I$, esiste unica $\alpha: I \to \mathbb{R}$ curva a velocità unitaria con curvatura κ, torsione τ, e tale che $\alpha(t_0) = p_0$, $T(t_0) = T_0$, $N(t_0) = N_0$, $B(t_0) = B_0$.

Dim.: Le formule di Frenet sono un sistema di eq. diff. omogenee del prim'ordine, questo def. le f.ni T, N, B. Poi basta integrare T (dettagli: esercizio). $\square$

Superfici in $\mathbb{R}^3$

Cioè consid. varietà differenziabili di dim. 2 immerse in $\mathbb{R}^3$.
E' utile poter definire tali varietà in modo implicito:

Teorema: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto, $f: A \to \mathbb{R}$ differenziabile, $\ell \in f(A)$ e $S = \{(x,y,z) \in A \mid f(x,y,z) = \ell\}$.
Se $df_x \neq 0 \ \forall x \in S$ allora S è una superficie differenziabile immersa in $\mathbb{R}^3$.

Es.: Sfera di raggio $r > 0$: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $\ell = r^2$

Per ogni $p \in S^2$ dobbiamo trovare almeno una derivata parziale di f in p nonnulla, d'altronde $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 2z$.

quindi ok perché $(0,0,0) \notin S^2$.

<u>Dim. del 1° teorema:</u> Scegliamo $p \in S$. Possiamo assumere $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$.

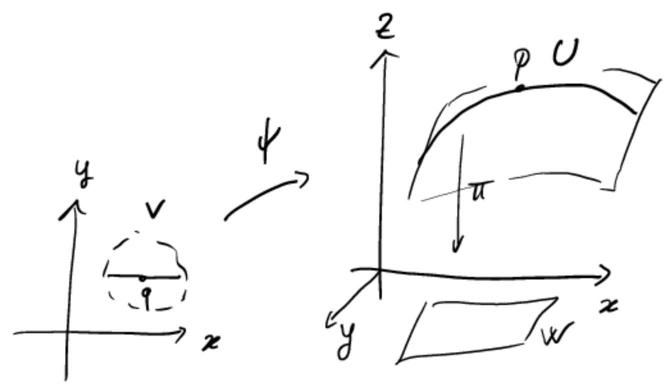
Sia $A' \subseteq A$ ap. tale che $\frac{\partial f}{\partial z}(q) \neq 0 \ \forall q \in A' \cap S$ e $A' \ni p$.

Per il teorema della funzione implicita l'aperto $A' \cap S$ è il grafico di una funzione C^∞ $g : V \to \mathbb{R}$, dove $V \subseteq \mathbb{R}^2$ è aperto ed è la proiezione di $A' \cap S$ sulle prime 2 coord..

Allora
$$\begin{aligned}\psi : V &\longrightarrow U = A' \cap S \\ (x,y) &\longmapsto (x, y, g(x,y))\end{aligned}$$
è parametrizzazione di Monge nell'intorno ap. U di p. $\square$

<u>Teorema:</u> Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie differenziabile immersa, allora esistono parametrizzazioni di Monge per ogni punto di S.

<u>Dim.:</u> Sia $p \in S$ e sia $\psi : V \to U$ parametrizz. con $p \in U$. Il diff.



$d\psi_q$ è iniettivo, dove $q = \psi^{-1}(p)$, ed è dato dalla matrice

Jacobiana $\begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x} & \frac{\partial\psi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi_3}{\partial x} & \frac{\partial\psi_3}{\partial y} \end{pmatrix}$ che allora ha rango 2. Quindi c'è

un minore 2×2 invertibile, supp. sia $\begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x} & \frac{\partial\psi_2}{\partial y} \end{pmatrix}$ e consid.

$\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la proiez. sulle prime 2 coordinate. La funzione $\pi\circ\psi : V \to \mathbb{R}^2$ ha diff. in q che è un isomorfismo, quindi a meno di restringere U abb.

$\pi\circ\psi : U \to W = \pi(U)$ invertibile con inversa C^∞.

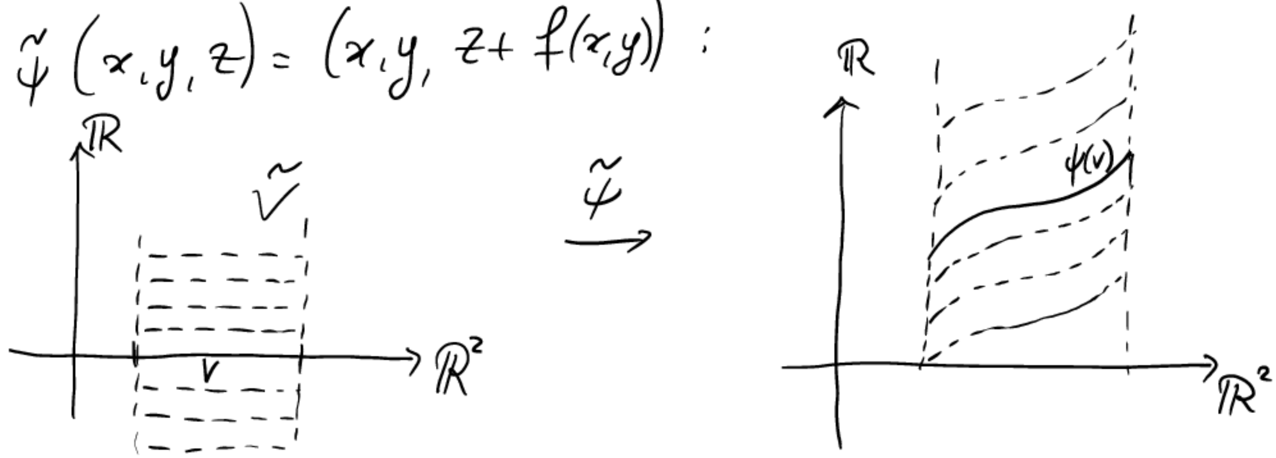
Otteniamo una parametrizzazione di Monge prendendo $\tilde{\psi} = \psi\circ(\pi\circ\psi)^{-1}$: $W \to U$. E' C^∞, e sui punti di W coincide con l'inversa di $\pi|_U : U \to W$, cioè è del tipo $\tilde{\psi}(x,y) = (x,y,f(x,y))$ per una $f : W \to \mathbb{R}$ tale che $\tilde{\psi}(x,y) \in U$.

Cioè $\tilde{\psi}$ è parametrizz. di Monge. $\square$

<u>Oss.</u>: L'utilità delle parametrizz. di Monge è questa:
data una param. <u>qualsiasi</u> $\psi : V(\subseteq\mathbb{R}^2) \to U \subseteq S$, possiamo mettere $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ come $\{(x,y,0) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$, e possiamo voler cercare di <u>estendere</u> ψ a un aperto $\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^3$ contenente V, ottenendo

$\tilde{\psi} : \tilde{V} \to \mathbb{R}^3$, tale che $\tilde{\psi}|_V = \psi$. Ma non è detto che ciò sia possibile, anche se prendiamo $\tilde{V}$ molto piccolo e "vicino" a V.

Invece se ψ è di Monge è del tipo $\psi(x,y) = (x, y, f(x,y))$ ed è facile estenderla a $\tilde{V} = V \times \mathbb{R}$ ponendo $\tilde{\psi}(x,y,z) = (x, y, z + f(x,y))$:



Da questo segue: sappiamo che $\psi^{-1} : U \to V$ è biiettiva e continua, ma non possiamo dire che è C^∞ perchè U non è un aperto di $\mathbb{R}^3$. Ma se ψ è di Monge allora possiamo dire che ψ^{-1} è la <u>restrizione</u> di

$(\tilde{\psi})^{-1}$, che è definita su un aperto di $\mathbb{R}^3$ <u>ed è C^∞</u>.

Questo fatto è utile per dimostrare che ogni sup. diff. immersa in $\mathbb{R}^3$ è una varietà differenziabile:

<u>Corollario</u>: Ogni superficie differenziabile S immersa in $\mathbb{R}^3$ è una varietà differenziabile di dim. 2.

Dim.: Possiamo supporre grazie al teorema che S abbia per ogni punto param. di Monge. In più, grazie alla dim. del teo. precedente, per ogni param. $\psi: V \to U$ di S esiste una param. di Monge ψ_m di S tale che $\underbrace{\psi_m^{-1}}_{\text{(era } \pi \text{ nell'altra dim.)}} \circ \psi$ è C^∞ con inversa C^∞ (a meno di restringere domini e codomini).

Siano allora $\psi, \tilde{\psi}$ param. di S, sia ψ_m come prima, e verifichiamo la compatibilità delle carte locali $\varphi = \psi^{-1}$, $\tilde{\varphi} = (\tilde{\psi})^{-1}$: abb.

$$\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1} = \psi^{-1} \circ \tilde{\psi} = (\psi^{-1} \circ \psi_m) \circ (\psi_m^{-1} \circ \tilde{\psi})$$

Ora: $\psi^{-1} \circ \psi_m$ è C^∞ perché è l'inversa di $\psi_m^{-1} \circ \psi$, e $\psi_m^{-1} \circ \tilde{\psi}$ è C^∞ perché $\tilde{\psi}$ lo è, e ψ_m^{-1} è la restrizione di un'appl. C^∞ grazie all'oss. precedente. $\square$

Oss.: In modo simile si dimostra che l'immagine di una curva $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ è una var. diff., a meno di restringere il dominio I, se α è regolare, e che una var. diff. di dim. m immersa in $\mathbb{R}^n$ è una var. diff. per qualsiasi m ed n.

Applicazioni differenziabili fra superfici

Def.: 1) Sia S superficie diff. Una funzione $f: S \to \mathbb{R}$ si dice <u>differenziabile in $x \in S$</u> se esiste un intorno coordinato U di x in S con carta locale $\varphi: U \to V \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che $f \circ \varphi^{-1}: V \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $\varphi(x) \in U$. La f.ne f si dice <u>differenziabile</u> se lo è in x $\forall x \in S$.

2) Una funzione $f: S \to \mathbb{R}^n$ si dice <u>differenziabile</u> se lo sono tutte le sue componenti (come f.ni $S \to \mathbb{R}$).

3) Siano S_1, S_2 sup. diff.. Un'appl. $f: S_1 \to S_2$ è <u>differenziabile</u> in $x \in S_1$ se esiste U ap. coord. in S_1 contenente x, con carta locale $\varphi: U \to V$

ed esiste U' ap. coord. in S_2 contenente $f(x)$, con carta locale

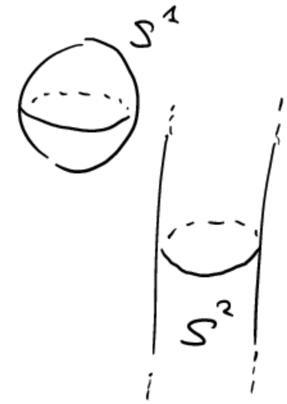
$\varphi': U' \to V'$, tali che $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}: V \to V'$ è diff. in $\varphi(x)$.

4) $f: S_1 \to S_2$ è un <u>diffeomorfismo</u> se è biiettiva, differenziabile, e $f^{-1}: S_2 \to S_1$ è differenziabile.

<u>Oss.:</u> 1) Se S_1 ed S_2 sono sup. diff. immerse in $\mathbb{R}^3$, il fatto che una $f: S_1 \to S_2$ sia differenziabile si esprime facilm. usando parametrizz. $\psi: V \to U$ e $\psi': V' \to U'$ di S_1 ed S_2 rispettivam., imponendo che $(\psi')^{-1} \circ f \circ \psi$ sia differenziabile come appl. fra aperti di $\mathbb{R}^2$.

2) Si dim. facilmente che se $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile e $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è una sup. differenziabile immersa, allora $f|_S: S \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile.

Esempi 1) $f : S \to \mathbb{R}$ è diff.
$\qquad x \longmapsto \|x-u\|^2$
(S sup. diff. immersa)



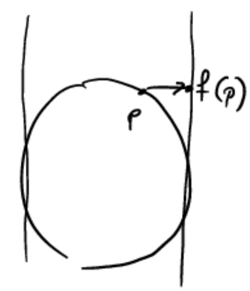
2) $S_1 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \}$

$S_2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1 \}$

$f : \tilde{S}_1 \to S_2$

$(x,y,z) \longmapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z \right)$

dove $\tilde{S}_1 = S_1 \setminus \{ (0,0,1), (0,0,-1) \}$.



Esercizio: dim. che f è diff.

(Sugg.: usare parametrizz. del tipo

$\psi : V \to \tilde{S}_1$

$(\theta, \varphi) \longmapsto (\cos(\varphi)\cos(\theta), \cos(\varphi)\sin(\theta), \sin(\varphi))$

$\psi' : V' \to S_2$

$(\theta, t) \longmapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), t)$.)

Differenziali di funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, calcolo con curve, spazi tangenti a sup.

Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, f differenziabile, $p \in A$.

$df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è def. come $df_p(\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{v}}) = \underbrace{Jf_p}_{\text{matr. Jacobiana}} \cdot v$.

Vediamo che si può calcolare usando curve diff.

Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ curva con $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) = v$ per un $t_0 \in I$,

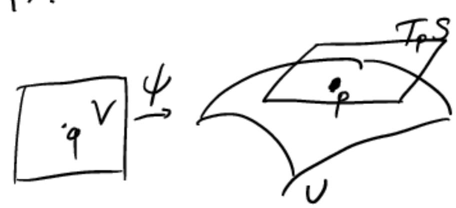
Allora $\boxed{df_p(v) = \beta'(0)}$ dove $\beta(t) = f(\alpha(t))$.

<u>Def.</u>: Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie diff. immersa, $p \in S$. Lo <u>spazio tangente</u> ad S in p è:

$$T_pS = \{ \underbrace{v \in \mathbb{R}^3}_{(T_p\mathbb{R}^3 \text{ in realtà})} \mid \exists \alpha : I \longrightarrow S \text{ curva diff. param. tale che } \alpha(t_0) = p \text{ per un } t_0 \in I, \text{ e } \alpha'(t_0) = v \}$$

<u>Prop.</u>: Sia U intorno coordinato di p in S, $\psi : V \to U$ parametrizz., $q = \psi^{-1}(p)$. Allora $T_pS = \mathrm{Im}\,(d\psi_q)$.

In particolare T_pS è un sottosp. vett. di $\mathbb{R}^3$.



<u>Dim.</u>: Data $\alpha : I \longrightarrow S$ con $\alpha(t_0) = p$, $\alpha'(t_0) = v \in T_pS$, basta consid. $\beta = \psi^{-1} \circ \alpha : I \longrightarrow U$, e vale $d\psi_q(\beta'(t_0)) = v$. Segue $T_pS \subseteq \mathrm{Im}(d\psi_q)$.

Dato $w = d\psi_q(u)$, basta consid. $\beta : \begin{matrix} I \to V \\ t \mapsto q + tu \end{matrix}$ (I intervallo tale che $q + tu \in V$ $\forall t \in I$) e $d\psi_q(u) = (\psi \circ \beta)'(0)$ da cui $\mathrm{Im}(d\psi_q) \subseteq T_pS$. $\square$

Data ora $f : S_1 \longrightarrow S_2$ diff., definiamo $df_p : T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$ per $p \in S_1$. Dato $v \in T_pS_1$, scegliamo $\alpha : I \longrightarrow S_1$ con $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) = v$, e poniamo

$$df_p(v) = (f\circ\alpha)'(t_0)$$

Esercizio: Dimostrare che $df_p(v)$ non dipende dalla scelta di α, e che è un'applicazione lineare. (Suggerimento: tramite carte locali, scrivere df_p come differenziale di un'appl. diff. $V_1 \to V_2$ con $V_i \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto.)

I forma fondamentale

Def.: Sia $\psi : V \to U$ parametrizz. di $S \subseteq \mathbb{R}^3$ sup. diff. immersa, $q \in V$, $p = \psi(q)$. Scriviamo $q = (u_0, v_0)$, si chiama u-curva la curva

$$\begin{aligned} I_u &\to S \\ t &\mapsto \psi(t, v_0) \end{aligned}$$

con $I_u = \{ t \in \mathbb{R} \mid (t, v_0) \in V \}$

e v-curva la curva $\begin{aligned} I_v &\to S \\ t &\mapsto \psi(u_0, t) \end{aligned}$ con $I_v = \{ t \mid (u_0, t) \in V \}$

Denotiamo $X_u = \dfrac{\partial \psi}{\partial u}$ $X_v = \dfrac{\partial \psi}{\partial v}$, sono una base di T_pS. Oss.: X_u e X_v sono le derivate rispett. della u-curva e della v-curva.

(Notazione: $A_u = \frac{\partial A}{\partial u}$, $A_v = \frac{\partial A}{\partial v}$, $A_{uu} = \frac{\partial A}{\partial u \partial u}$, ecc...)

<u>Def.</u>: La <u>1^a forma fondamentale</u> è la forma bilineare

$$I_p : T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, w) \longmapsto \underset{\uparrow \text{prod. scalare std in } \mathbb{R}^3}{v \cdot w}$$

Talvolta si chiama 1^a forma fondamentale anche la forma quadratica associata a questa forma bilineare simmetrica, e si usa lo stesso simbolo, cioè $I_p : T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\underbrace{I_p}_{\text{la f. quadratica}}(v) = \underbrace{I_p}_{\text{la f. bilineare}}(v,v).$$

<u>Oss.</u>: Calcoliamo la matrice di I_p rispetto alla base X_u, X_v: è semplicem. la matrice $\begin{pmatrix} X_u \cdot X_u & X_u \cdot X_v \\ X_u \cdot X_v & X_v \cdot X_v \end{pmatrix}$.

Per brevità, la indicheremo anche come $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$.

(cioè poniamo $E = X_u \cdot X_u$, ecc...).

Notiamo che $E, G > 0$, e $EG - F^2 > 0$.

Esempio: Sfera di raggio r, parametrizz.

$$\varphi(u,v) = (r\cos(u),\ r\sin(u)\cos(v),\ r\sin(u)\sin(v))$$

$$X_u = (-r\sin(u),\ r\cos(u)\cos(v),\ r\cos(u)\sin(v))$$

$$X_v = (0,\ -r\sin(u)\sin(v),\ r\sin(u)\cos(v))$$

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = r^2\sin^2(u)$$

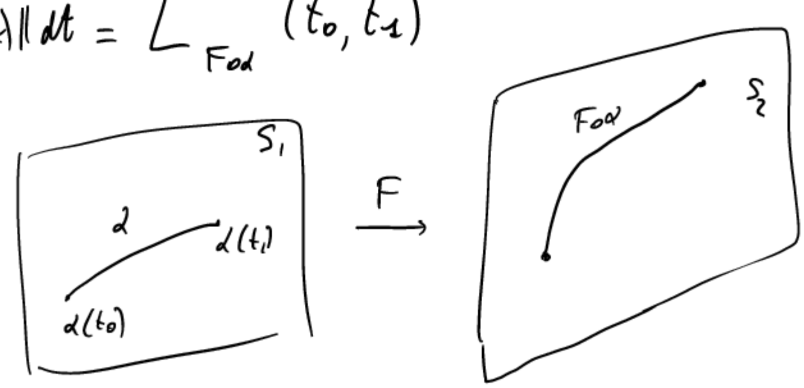
Def.: 1) Siano S_1, S_2 superfici in $\mathbb{R}^3$, $F: S_1 \longrightarrow S$ diffeomorfismo. F si dice isometria se $\forall p: dF_p: T_pS_1 \longrightarrow T_pS_2$ è isometria di sp. euclidei, dove come prod. scalare si prendono le rispettive 1e forme fondamentali.

2) $F: S_1 \to S_2$ differenziabile è un isometria locale se $\forall_p$ dF_p è isometria.

Oss.: Se F è un'isometria locale allora conserva le lungh. delle curve, cioè data $\alpha: I \longrightarrow S_1$, $t_0, t_1 \in I$, allora

$$L_\alpha(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I^{S_1}_{\alpha(t)}(\alpha'(t))}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I^{S_2}_{F(\alpha(t))}((F\circ\alpha)'(t))}\, dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \|(F\circ\alpha)'(t)\| dt = L_{F\circ\alpha}(t_0,t_1)$$



Si dim. facilmente anche il viceversa: se F differenziabile conserva le lunghezze come sopra, è isometria locale.

Operatore forma

Vediamo per le superfici l'analogo della curvatura.

Def.: Un campo (differenziabile) di vettori su $S \subseteq \mathbb{R}^3$ sup. diff. immersa è un'applicaz. diff. $\mu : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (dove si intende $\mu(p)$ come vettore in $T_p\mathbb{R}^3$). μ è tangente ad S se $\mu(p) \in T_pS$ $\forall p$, μ è normale ad S se $\mu(p) \perp T_pS$ $\forall p$.

La sup. S si dice orientabile se esiste un campo di vettori normale v tale che $v(p) \neq 0$ $\forall p$. Equivalentemente, se $\exists N$ c. di vett. normali t.c. $\|N(p)\| = 1$ $\forall p \in S$. La sup. S con un tale N si dice superficie orientata.

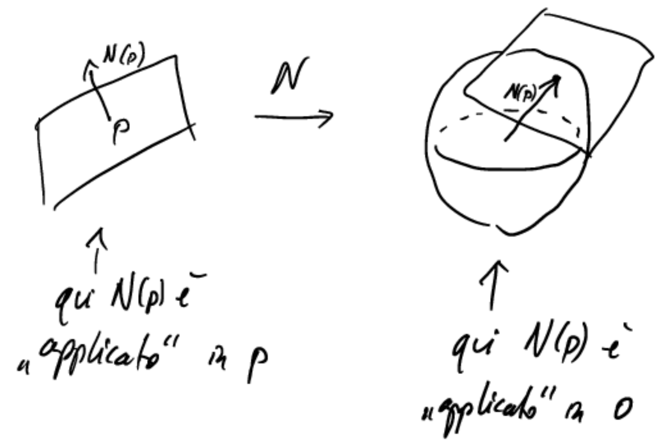
Esempi: 1) Se S è def. implicitamente come $S = \{f(x,y,z) = 0\}$, allora il gradiente di f è un campo di vettori normale ad S (per $\alpha : I \to S$ basta derivare $f(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) = 0$ e si ottiene $\nabla f_{\alpha(t)} \perp \alpha'(t)$ $\forall t$). Cioè S è orientabile

2) Se S ha una sola parametrizz. allora è orientabile, basta prendere $X_u \wedge X_v$.

3) Il nastro di Möbius (senza bordo), costruito come una sup. diff. immersa in $\mathbb{R}^3$, non è orientabile.

Def.: Sia S sup. orientata con campo di vett. normali (di norma 1) $N: S \to S^2$.

Sia $dN_p : T_p S \to T_{N(p)} S^2$ il diff. di N, allora osserviamo che $T_p S = T_{N(p)} S^2$, perché entrambi sono ortogonali a $N(p)$. Con questa identificazione, l'operatore forma è



$$L_p \ (= -dN_p) : T_p S \longrightarrow T_p S$$
$$v \longmapsto -dN_p(v)$$

Oss.: $L_p(v)$ dà quindi la direzione in cui si "inclina" $-N(p)$ se mi muovo da p con velocità v.

Teorema: L_p è autoaggiunto (=simmetrico) rispetto alla 1ª forma fond., cioè
$$L_p(v) \cdot w = v \cdot L_p(w) \quad \forall v, w \in T_p S.$$

Dim.: Basta verificarlo su una base, ad es. X_u, X_v.

Abb. $X_u = \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0,v_0)$, $L(X_u) = \frac{\partial}{\partial u}\left(-N \circ \psi\right)(u_0,v_0)$

„Ignorando" ψ, possiamo semplificare le notazioni e scrivere semplicemente $N_u \left(= -L(X_u)\right)$ e $N_v = \left(-L(X_v)\right)$ pensando N come appl. definita su un ap. di $\mathbb{R}^2$.

Sappiamo $N \cdot X_v = 0$, derivando risp. a u segue

$$N_u \cdot X_v + N \cdot \underbrace{X_{vu}}_{\frac{\partial \psi}{\partial v \partial u}} = 0$$

e ugualmente $N_v \cdot X_u + N \cdot X_{uv} = 0$. Per il teo. di Schwarz sappiamo $X_{uv} = X_{vu}$, quindi $N_u \cdot X_v = N_v \cdot X_u$, che è proprio $-\left(L(X_u) \cdot X_v\right) = -\left(X_u \cdot L(X_v)\right)$.

$\square$

II forma fondamentale

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ orientata, campo di vett. normali N di norma 1.

Def.: 1) La forma quadratica associata a L_p su T_pS è detta 2ª forma fondamentale, cioè:

$$\begin{aligned} \mathrm{II}_p : T_pS &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto L_p(v) \cdot v \end{aligned}$$

(Oppure la forma bil. associata: $\mathrm{II}_p(v,w) = L_p(v) \cdot w$)

2) Data $\alpha : I \to S$ a vel. unitaria con $\alpha(t_0) = p$, si dice <u>curvatura normale</u> di α in p il numero $k_{n,\alpha}(p) = \underbrace{k_\alpha(t_0)\, n_\alpha(t_0)}_{= \alpha''(t_0)} \cdot N(p)$.

<u>Teorema</u> (di Meusnier): Dato $v = \alpha'(t_0)$, abb.

$$\mathrm{II}_p(v) = k_{n,\alpha}(p)$$

<u>Dim.</u>: Abb.

$$\mathrm{II}_p(v) = L_p(v) \cdot v, \qquad L_p(v) = -(N \circ \alpha)'(t_0)$$

e sappiamo $(N \circ \alpha)(t) \cdot \alpha'(t) = 0 \quad \forall t$,

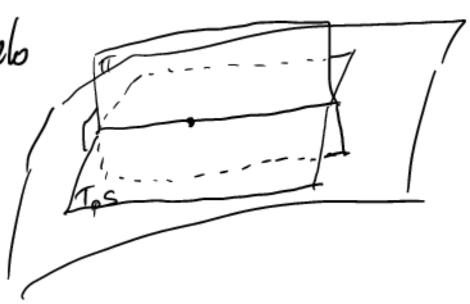
che derivando produce $\underbrace{-(N \circ \alpha)'(t) \cdot \alpha'(t)}_{= L_p(v) \cdot v} = (N \circ \alpha)(t) \cdot \alpha''(t)$.

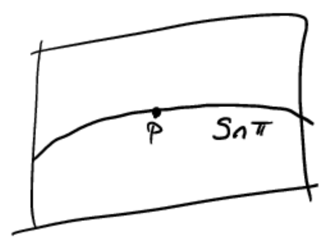
Segue

$$\mathrm{II}_p(v) = (N \circ \alpha)(t_0) \cdot \underbrace{\alpha''(t_0)}_{= k_\alpha(t_0)\, n_\alpha(t_0)} = k_{n,\alpha}(t_0).$$

$\square$

Allora $\mathrm{II}_p(v)$ è la curvatura di una „sezione normale" di S in p, cioè una curva ottenuta intersecando S con un piano affine $\pi \subseteq \mathbb{R}^3$ parallelo a v, contenente p, e ortogonale a T_pS.





Oss.: se $k_1(p), k_2(p)$ sono gli <u>autovalori</u> di L_p, allora sono la curvatura massima e minima di una sezione normale.

Esempi: Sfera di raggio $r>0$:

$$\varphi(u,v) = (r\cos(u),\ r\sin(u)\cos(v),\ r\sin(u)\sin(v))$$

$$X_u = (-r\sin(u),\ r\cos(u)\cos(v),\ r\cos(u)\sin(v))$$

$$X_v = (0,\ -r\sin(u)\sin(v),\ r\sin(u)\cos(v))$$

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\| X_u \wedge X_v \|} = \dots \ , \quad N_u = \dots \ , \ N_v = \dots$$

Matrice di $\mathbb{I}_p$ nella base X_u, X_v di T_pS:

$$\begin{pmatrix} L(X_u)\cdot X_u & L(X_u)\cdot X_v \\ L(X_v)\cdot X_u & L(X_v)\cdot X_v \end{pmatrix} \quad \text{con } \begin{array}{l} L(X_u) = -N_u \\ L(X_v) = -N_v \end{array}$$

Metodo veloce per calcolare $\mathbb{I}_p$:

$$N: S \longrightarrow S^2 \quad \text{è} \quad p \longmapsto \frac{p}{\|p\|} = \frac{1}{r}p$$

quindi $dN_p : T_pS \to T_pS$ è $v \longmapsto \frac{1}{r}v$

allora $L(X_u) = -\frac{1}{r}X_u$, $L(X_v) = -\frac{1}{r}X_v$

cioè $\mathbb{I}_p = -\frac{1}{r}\, I_p$

Def.: 1) Gli autovettori di L_p si dicono vettori principali, se hanno norma 1 si dicono direzioni principali, gli autovalori curvature principali.

2) La curvatura gaussiana $K(p)$ è il det. di L_p, cioè il prodotto delle curvature principali. La curvatura media $H(p)$ è $\frac{tr(L_p)}{2}$, cioè la media aritmetica delle curv. princ..

3) $p \in S$ è:

ellittico se $K(p) > 0$

iperbolico se $K(p) < 0$

parabolico se $K(p) = 0$ ma $L_p \neq 0$

polare se $L_p = 0$

ombelicale se L_p è un'omotetia, cioè le due curvature principali sono uguali.

4) Diamo una notazione per le entrate della matrice di II_p (base (X_u, X_v))

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} \mathcal{L} &= L_p(X_u) \cdot X_u = -N_u \cdot X_u \\ \mathcal{M} &= L_p(X_u) \cdot X_v = -N_u \cdot X_v \\ \mathcal{N} &= L_p(X_v) \cdot X_v = -N_v \cdot X_v \end{aligned}$$

$\underline{\text{Oss.:}}$ 1) Abb. già osservato: $\mathcal{M} = N \cdot X_{uv}$, $\mathcal{L} = N \cdot X_{uu}$, $\mathcal{N} = N \cdot X_{vv}$

2) Data A matrice di L_p nella base X_u, X_v, abb.

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot A \right)$$

che ci permette di esprimere le curvature media e gaussiana:

$$H(p) = \frac{G\mathcal{L} - 2F\mathcal{M} + E\mathcal{N}}{2(EG-F^2)},$$

$$K(p) = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2}.$$

Visto che il polinomio caratt. di A è $x^2 - 2H(p)x + K(p)$, allora le curvature principali sono $H(p) \pm \sqrt{H(p)^2 - K(p)}$.

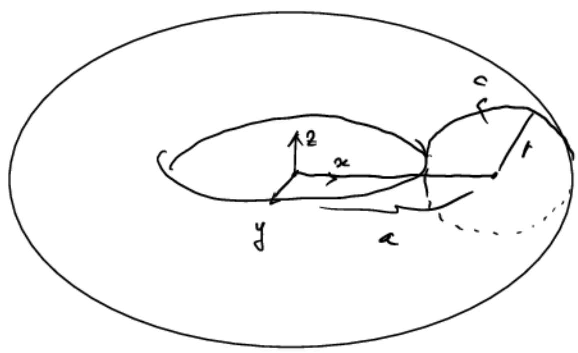
$\underline{\text{Esempi:}}$ 1) Sfera di raggio $r>0$, ric. $\mathrm{II}_p = -\frac{1}{r} \mathrm{I}_p$.

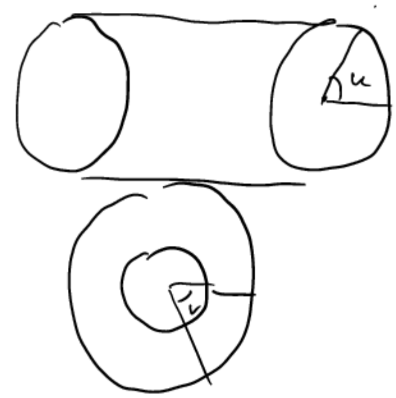
Calcoliamo le curvature principali; se assumiamo che la matrice di I_p è la matr. identità (cioè scegliamo una base ortonormale per $T_p S$) allora II_p e L_p hanno la stessa matrice.

Cioè L_p ha matrice $\begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix}$ quindi i suoi autovalori sono solo $-\frac{1}{r}$, e $K(p) = \frac{1}{r^2}$.

2) Toro:

$(r<a)$





$$\psi(u,v) = \Big((a + r\cos(u))\cos(v),\ (a + r\cos(u))\sin(v),\ r\sin(u) \Big)$$

$$X_u = (-r\sin(u)\cos(v),\ -r\sin(u)\sin(v),\ r\cos(u))$$

$$X_v = (-(a + r\cos(u))\sin(v),\ (a + r\cos(u))\cos(v),\ 0)$$

$$X_{uu} = (-r\cos(u)\cos(v),\ -r\cos(u)\sin(v),\ -r\sin(u))$$

$$X_{uv} = (r\sin(u)\sin(v),\ -r\sin(u)\cos(v),\ 0)$$

$$X_{vv} = (-(a + r\cos(u))\cos(v),\ -(a + r\cos(u))\cos(v),\ 0)$$

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \qquad \|X_u \wedge X_v\| = \sqrt{EG - F^2}$$

$$N \cdot X_{uu} = \frac{(X_u \wedge X_v) \cdot X_{uu}}{\sqrt{EG - F^2}} = \ldots = r = \mathcal{L}$$

e in modo simile $\mathcal{M} = 0$, $\mathcal{N} = \cos(u)(a + r\cos(u))$.

Otteniamo

$$K(p) = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2} = \frac{\cos(u)}{r(a + r\cos(u))}$$

Per $u \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ p è ellittico, per $u \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi[$ p è iperbolico, $u \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\}$ p è parabolico.

<u>Teorema</u> (Theorema egregium di Gauß):

La curvatura gaussiana è invariante per isometrie locali.

<u>Oss.</u>: Quindi ad es. non esiste un'isometria locale fra $U \subseteq \mathbb{R}^2$ e $V \subseteq S^2$ aperti (carte geografiche!).

<u>Dim.</u>: Le funzioni E, F, G sono invarianti per isometrie locali, mentre $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ non è detto che lo siano (ad es. c'è isometria locale $\mathbb{R}^2 \to$ (sup. lat. di un cilindro), ma

$$(u,v) \longmapsto (\cos(u), \sin(u), v)$$

le due curvature principali di $\mathbb{R}^2$ sono costantem. 0, mentre le curvature principali della sup. lat. del cilindro (raggio = 1) sono costanti 0 e -1).

Dimostriamo il teorema esprimendo $K = K(p)$ solo in f.ne di E, F, G e delle loro derivate:

$$K = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG-F^2}\,, \qquad (EG-F^2)^2 K = (\mathcal{L}\mathcal{N}-\mathcal{M}^2)(EG-F^2)$$

Ric. $\mathcal{L} = \dfrac{(X_u \wedge X_v)\cdot X_{uu}}{\sqrt{EG-F^2}}$, ecc...

allora $K \cdot (EG-F^2)^2 = \big((X_u \wedge X_v)\cdot X_{uu}\big)\big((X_u \wedge X_v)\cdot X_{vv}\big) -$
$\big((X_u \wedge X_v)\cdot X_{uv}\big)^2 = (\dots)$

Ora: $(v_1 \wedge v_2)\cdot v_3 = \det\begin{pmatrix} \boxed{\ v_1\ } \\ \boxed{\ v_2\ } \\ \boxed{\ v_3\ } \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \boxed{v_1} & \boxed{v_2} & \boxed{v_3} \end{pmatrix}$

per cui

scritti in riga

$$(\dots) = \det\begin{pmatrix} X_u \\ X_v \\ X_{uu} \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} X_u \\ X_v \\ X_{vv} \end{pmatrix}^t - \det\begin{pmatrix} X_u \\ X_v \\ X_{uv} \end{pmatrix}^2 =$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} X_u \\ X_v \\ X_{uu} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \\ X_{vv} \end{pmatrix}^t\right) - \det\left(\begin{pmatrix} X_u \\ X_v \\ X_{uv} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \\ X_{uv} \end{pmatrix}^t\right) = \dots$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\ X_u\ } \\ \boxed{\ X_v\ } \\ \boxed{\ X_{uu}\ } \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{X_u} & \boxed{X_v} & \boxed{X_{vv}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{=E}{X_u \cdot X_v} & F & X_u \cdot X_{vv} \\ \vdots & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\ldots = \underbrace{\det\begin{pmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ X_{uu}\cdot X_u & X_{uu}\cdot X_v & X_{uu}\cdot X_{vv} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} E & F & X_u\cdot X_{vv} \\ F & G & X_v\cdot X_{vv} \\ X_{uu}\cdot X_u & X_{uu}\cdot X_v & 0 \end{pmatrix}}$$

(fanno il 1° dei due determinanti della riga prec.)

$$\underbrace{- \det\begin{pmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ X_{uv}\cdot X_u & X_{uv}\cdot X_v & X_{uv}\cdot X_{uv} \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} E & F & X_u\cdot X_{uv} \\ F & G & X_v\cdot X_{uv} \\ X_{uv}\cdot X_u & X_{uv}\cdot X_v & 0 \end{pmatrix}} = (\ldots)$$

(fanno il 2° determinante)

Ora: $X_{uu}\cdot X_u = \frac{1}{2}\left(X_u \cdot X_u\right)_u = \frac{E_u}{2}$

$$X_{uu}\cdot X_v = (X_u\cdot X_v)_u - X_u\cdot X_{uv} =$$

$$= F_u - \frac{1}{2}\left(X_u\cdot X_u\right)_v = F_u - \frac{E_v}{2}$$

e analogam. $X_{uv}\cdot X_u = \frac{E_v}{2}$, $\quad X_{vv}\cdot X_u = F_v - \frac{G_u}{2}$,

$$X_{uv}\cdot X_v = \frac{G_u}{2}, \quad X_{vv}\cdot X_v = \frac{G_v}{2}.$$

Allora

$$(\ldots) = (EG-F^2)\left(\underbrace{X_{uu}\cdot X_{vv} - X_{uv}\cdot X_{uv}}_{=A}\right) + \det\begin{pmatrix} E & F & F_v - \frac{G_u}{2} \\ F & G & \frac{G_v}{2} \\ \frac{E_u}{2} & F_u - \frac{E_v}{2} & 0 \end{pmatrix} -$$

$$- \det\begin{pmatrix} E & F & \frac{E_v}{2} \\ F & G & \frac{G_u}{2} \\ \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

e infine $A = (X_{uu} \cdot X_v)_v - (X_v \cdot X_{uv})_u =$

$$= \left(F_u - \frac{E_v}{2}\right)_v - \frac{1}{2} G_{uu} .$$

$\square$